Física. Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi
Bernardo Ezequiel Barba Barba

ESPOCH

2022

FÍSICA
Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías

FÍSICA
Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías

Unidades y medidas
Gráficas y funciones
Magnitudes vectoriales

Diego Guillermo Barba Maggi
Bernardo Ezequiel Barba Barba

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
Fundada en 1972
Riobamba - Ecuador

Física. Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU:53 + 624/628
Física. Fundamentos teórico-prácticos para ciencias e ingenierías
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2022
235 pp. vol: 17,6 x 25 cm
ISBN: 978-9942-42-115-9
1. Física
2. Ingenierías

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

PRÓLOGO

La física, ciencia que estudia los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, establece los fundamentos científicos para las carreras técnico-científicas que ofertan las politécnicas y universidades en el país y en el mundo.

Esta asignatura correlaciona las interacciones de las diversas propiedades de la materia, identificando sus características mediante las magnitudes que intervienen en dichos fenómenos para, mediante el método científico, establecer las leyes que las rigen, que son correlaciones entre tales magnitudes.

El estudiante que inicia sus estudios en el nivel superior debe conocer y comprender estas magnitudes, desde dos puntos de vista; el primero el de los sistemas de unidades que se clasifican en fundamentales y derivadas, y la manera de definir dimensionalmente a las segundas en función de las primeras.

El segundo enfoque de las magnitudes es en base a su definición, resultando ser las escalares y las vectoriales, los métodos y técnicas de identificarlas y expresarlas en forma gráfica y analítica, como también de realizar las diferentes operaciones con ellas.

Finalmente, es indispensable que nuestro alumno disponga del conocimiento de estas herramientas científicas, que le permitirá expresar sus leyes, en forma de funciones, manifestadas en forma de gráficas, ecuaciones y tablas de resultados experimentales, tanto en estas ciencias fundamentales, como en las de especialización que se analizarán posteriormente.

INTRODUCCIÓN

Por la experiencia y la convivencia de los autores con los estudiantes que emprenden el camino hacia la búsqueda de su profesión en carreras técnico-científicas, y dada su formación académica en la Espoch, particularmente en la carrera de Ingeniería Mecánica, esta nobilísima institución nos dio la oportunidad de moldear a la materia prima más relevante del universo, como es el ser humano, compartiendo y aprendiendo con nuestros alumnos. ¡A conocer la ruta del conocimiento, para más tarde aplicarlo en la solución de los problemas técnicos y prácticos de la sociedad!

La mayoría de facilitadores universitarios consideran que los estudiantes que ingresan a este nivel tienen suficientes conocimientos básicos sobre las unidades que vamos a tratar en este «primer texto». Con estos supuestos, empiezan a desarrollar sus asignaturas, entre ellas, Física, que, para las carreras de ingeniería y afines, es considerada como la ciencia fundamental, que establece los cimientos para las asignaturas de especialidad y de carrera de estos futuros profesionales. Por tales razones, ponemos a consideración esta herramienta indispensable.

En la primera unidad, presentamos en forma amplia la organización de las magnitudes en los sistemas de unidades, refiriéndonos de forma particular al sistema que, en Ecuador y en un 90 % de países en el mundo, tiene que ser usado obligatoriamente al hacer ciencia, como es el sistema internacional de unidades (SI). Esto no quiere decir que podemos evitar que se utilicen otros sistemas y otras unidades para medir magnitudes, incluso para mayor comodidad del ser humano. Pero, al resolver un problema o ejercicio, se deberá utilizar el SI. Para ello, el estudiante debe ser experto en transformación de unidades con los factores de conversión.

Además, para demostrar que las propiedades de la materia y sus interacciones tienen una relación directa, se han elegido unas pocas magnitudes (o dimensiones), como fundamentales. Estas, junto con todas las demás magnitudes, que son muchas, sirven para desarrollar los diversos campos del conocimiento en las ciencias que se fundamentan en la física, como la mecánica, los fluidos, la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo, por mencionar algunos. Se demostrará que, al realizar un análisis dimensional, es posible definir las magnitudes en función de las fundamentales. Igual se puede hacerlo con sus respectivas unidades.

Se ha incluido una serie de ejercicios resueltos explícitamente detallados para facilitar la comprensión del estudiante, para que luego pueda resolver los ejercicios propuestos que le presentamos.

Las ciencias basadas en el universo, como la física, que tratan de explicar científicamente el impresionante y complejo funcionamiento de este, han permitido al ser humano crear eventos científicos de aplicación, en sistemas tecnológicos y prácticos que han dado lugar al desarrollo del mundo moderno en todos los campos para el buen vivir de la humanidad.

Al aplicar el método científico en el desarrollo del conocimiento, este se debe expresar como resultado de la observación de un fenómeno y las magnitudes que intervienen en dicho fenómeno, para luego establecer las hipótesis propuestas, comprobarlas, realizando un experimento que permita medir cuantitativamente esas magnitudes y con un conocimiento de funciones, expresarlas en forma de gráficas y ecuaciones (o fórmulas). El estudiante ya debe, en este nivel, manejar compresiblemente el tema de «gráficas y funciones».

Ahora sí, lo más importante para desarrollar las ciencias es utilizar e identificar las magnitudes. Debemos no solo clasificarlas dentro del grupo de fundamentales y derivadas, sino también definirlas. Desde este punto de vista, a las magnitudes se las clasifica en escalares y vectoriales. Las magnitudes escalares son fáciles de definir, porque se lo hace con un solo elemento que es su módulo (número real + unidad de medida), pero las magnitudes vectoriales, además del módulo, requieren de dos elementos más, que son dirección y sentido. Por ello, para su definición, se requiere conocer métodos geométricos y trigonométricos fundamentales, especialmente cuando su dirección ubica estas magnitudes en el espacio tridimensional donde se requiere saber de la mecánica de proyecciones. Por tal razón, el quinto y sexto capítulo tratan de este tema, desarrollando varios ejercicios resueltos de vectores en el espacio, en el plano y las diferentes formas de expresar a estas magnitudes, y sus respectivas operaciones para finalmente plantear varios ejercicios propuestos.

CAPÍTULO I. UNIDADES Y MEDIDAS

1.1. HERRAMIENTAS QUE PERMITEN DESARROLLAR LA CIENCIA

En este capítulo, el estudiante que inicia su carrera dispondrá de ciertas herramientas científicas indispensables para trabajar en las ciencias experimentales como la física y otras, en las cuales se debe medir cuantitativamente las magnitudes y expresarlas a través de unidades.

Es importante, ante todo, que el estudiante empiece familiarizándose con el concepto de «magnitudes», que no son más que propiedades que intervienen en las interacciones de la materia, como masa, posición, tiempo, volumen, velocidad, carga eléctrica, voltaje entre otros.

A estas propiedades o magnitudes, las vamos a clasificar dentro de los sistemas de unidades y a definirlas unas en función de otras, realizando un análisis dimensional.

1.2. GENERALIDADES

La necesidad de medir las magnitudes y establecer patrones para comprobarlas forma parte de las bases esenciales de comunicación entre los seres humanos. La vida de relación exige al hombre expresar racionalmente las características y el valor de las cosas para hacer posible su utilización y su intercambio.

Pasaron muchos siglos antes de que la humanidad encontrara el camino para adoptar un lenguaje universal, sistematizado y permanente que responda a las exigencias evolutivas de la ciencia, la tecnología y el comercio. Los intereses involucrados en la adopción de tal sistema sitúan estas decisiones en la esfera de competencia de los estados. Los griegos, los romanos, los señores feudales y las modernas naciones industriales han ejercido el imperio en cuanto a los patrones de medida a través de los tiempos y, alternativamente, han auspiciado u obstruido el entendimiento universal en esta materia, necesariamente afectada por los conflictos económicos entre los grandes países.

El esfuerzo persistente de los científicos llevó, después de muchos intentos, a adoptar convenciones alrededor de los sistemas de medición, los cuales despejaron el camino para una mejor difusión de la ciencia y de los adelantos tecnológicos, lo mismo que para el desarrollo del comercio mundial.

Con la adopción del sistema métrico decimal en Francia, a finales del siglo XVII, y con la adhesión posterior de una gran parte del mundo a la Convención del Metro, se logró el marco jurídico y operativo de un sistema universal de medidas, que se ha venido perfeccionando paulatinamente, hasta llegar a lo que hoy se denomina Sistema Internacional de Unidades (SI), adoptado por la XI Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en 1960 [1].

1.3. DEFINICIONES GENERALES

1.3.1. Símbolo literal

Es un conjunto de letras, escrito sin punto final, usado para representar un concepto, Ejem: con SI se representa el concepto Sistema Internacional de Unidades.

1.3.2. Abreviatura

Es el conjunto de letras tomadas de una palabra, escrito con punto final, usado para representar dicha palabra, ejemplo: Dr.

1.3.3. Magnitud

Es una propiedad de la materia que, siendo capaz de aumento o disminución, es susceptible de ser medida.

1.3.4. Unidad de medida

Es una magnitud que se escoge arbitrariamente como término de comparación de las demás magnitudes de su misma especie.

1.3.5. Medida de una magnitud

Es un número real que, acompañado de la unidad de medida, expresa las veces que la unidad de medida está contenida en la magnitud objeto de la medición.

1.3.6. Patrones de las unidades

Para realizar mediciones, escogemos patrones que son magnitudes de la misma especie de aquellas que se van a medir. Estos patrones tienen dos características primordiales: la accesibilidad y la invariabilidad.

1.3.7. Sistema de unidades

Es un conjunto coherente, sistemático y organizado de unidades que tiene una y solo una unidad para cada magnitud, adoptada convencionalmente.

1.4. SISTEMAS ABSOLUTOS

A pesar de que los ecuatorianos tenemos la obligación de utilizar únicamente el Sistema Internacional de Unidades. Sin embargo, las potencias industriales a escala mundial, como la angloamericana, obligan a utilizar otros sistemas de unidades, como los sistemas absolutos. Estos sistemas han seleccionado como magnitudes fundamentales las siguientes: longitud, masa y tiempo.

Tabla 1.1 Sistemas absolutos

Magnitudes fundamentales: unidades de longitud, masa y tiempo			
Nombre	**Longitud**	**Masa**	**Tiempo**
MKS	metro (m)	kilogramo (kg)	segundo (s)
CGS	centímetro (cm)	gramo (g)	segundo (s)
MTS	metro (m)	tonelada métrica (t)	segundo (s)
INGLÉS	pie (ft) (')	libra comercial (lb)	segundo (s)

1.4.1. SISTEMAS GRAVITACIONALES

Estos sistemas seleccionan como magnitud fundamental a la fuerza, en lugar de la masa, y como la fuerza (peso) depende de la aceleración de la gravedad y esta sería de acuerdo con el lugar en el universo, se denominan «sistemas gravitacionales».

Tabla 1.2 Sistemas gravitacionales

Magnitudes fundamentales: unidades de longitud, fuerza y tiempo			
Nombre	**Longitud**	**Fuerza ($\vec{F}$)**	**Tiempo**
Técnico	metro (m)	kilogramo fuerza o kilopondio (kgf, kp, kg)	segundo (s)
Inglés	pie	Libra fuerza (lbf, lb)	segundo (s)

1.5. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

1.5.1. Sistema internacional de unidades

Es el sistema de unidades adoptado por la undécima Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en el año de 1960. Actualmente, este sistema se basa en siete unidades fundamentales correspondientes a las siguientes magnitudes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de sustancia. Este sistema se basó en el sistema MKS; por ello es un sistema absoluto (SA).

1.5.2. SI

Es el símbolo adoptado por la undécima CGPM en 1960 para que represente internacionalmente el nombre SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES.

1.5.3. Unidades SI

Son las unidades fundamentales, suplementarias y derivadas que forman un conjunto coherente y pertenecen al SI.

Tabla 1.3 Unidades SI fundamentales

Magnitud	Unidad SI	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

1.5.4. Magnitudes y unidades fundamentales

Son magnitudes y sus unidades correspondientes SI, consideradas por la convención como mutuamente independientes que no están definidas en términos de otras.

1.5.5. Magnitudes y unidades suplementarias

Son magnitudes y las unidades correspondientes SI, que por motivos especiales no han sido clasificadas por la CGPM en 1960 ni como fundamentales, ni derivadas. Algunas veces es conveniente considerar el ángulo plano y el ángulo sólido como magnitudes dimensionalmente independientes de otras; sus unidades son el radián y el estereorradián; serían entonces fundamentales. Sin embargo, en otras ocasiones es conveniente considerar el ángulo plano como un cociente entre dos longitudes, y el ángulo sólido como un cociente entre la superficie y una longitud elevada al cuadrado; sus unidades serían entonces derivadas.

Tabla 1.4 Unidades SI Suplementarias

Magnitud	**Unidad SI**	**Símbolo**
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

1.5.6. Magnitudes y unidades derivadas

Son las magnitudes y unidades correspondientes SI definidas en términos de las magnitudes fundamentales y/o suplementarias y sus unidades se forman mediante multiplicaciones y/o divisiones, dimensionalmente adecuadas de las unidades SI, fundamentales y/o suplementarias sin la introducción de factores numéricos, y se clasifican en unidades derivadas que tienen nombres especiales y unidades derivadas que no tienen nombres especiales.

Tabla 1.5 Unidades Si derivadas que tienen nombres especiales

Magnitud	Unidad SI	Símbolo	Equivalencia (a)	Equivalencia (b)	Análisis dimensional
Frecuencia	Hertzio	*Hz*	1/s	s^{-1}	$[T^{-1}]$
Fuerza	Newton	*N*		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	$[LMT^{-2}]$
Presión	Pascal	*Pa*	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$[L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}]$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Julio	*J*	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-2}]$
Potencia, flujo de energía	Vatio	*W*	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-3}]$
Cantidad de electricidad o carga eléctrica	Culombio	*C*	$A \cdot S$	$S \cdot A$	$[T \cdot I]$
Diferencia de potencial o voltaje	Voltio	*V*	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}]$
Capacidad eléctrica	Faradio	*F*	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	$[L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2]$
Resistencia eléctrica	Ohmio	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^2]$
Conductancia eléctrica	Siemens	*S*	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	$[L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^3 \cdot I^2]$
Flujo magnético	Weber	*Wb*	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot S^{-2} \cdot A^{-1}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}]$
Densidad de flujo magnético	Tesla	*T*	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$[M^{-1} \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}]$
Inductancia	Henrio	*H*	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$[L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}]$
Flujo luminoso	Lumen	*lm*	cd x sr	$cd \cdot sr$	$[\psi \cdot \omega]$
Iluminación	Lux	*lx*	lm/m^2	lm/m^2	$[L^{-2} \cdot \psi \cdot \omega]$

a) Expresión en términos de otras unidades SI
b) Expresión en términos de unidades SI fundamentales y/o suplementarias.

Tabla 1.6 Unidades SI derivadas que no tienen nombres especiales

Magnitud	Nombre	Símbolo (a)	Símbolo (b)
Superficie	Metro cuadrado	m^2	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3	m^3
Densidad de masa (densidad)	Kilogramo por metro cúbico	kg/ m^3	$m^3 \cdot kg$
Velocidad lineal (velocidad)	Metro por segundo	m/s	$m \cdot s^{-1}$
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s	$s^{-1} \cdot rad$
Aceleración	Metro por segundo cuadrado	m/s^2	$m \cdot s^{-2}$
Aceleración angular	Radián por segundo cuadrado	rad/s^2	$s^{-2} \cdot rad$
Viscosidad dinámica	Newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Viscosidad cinemática	Metro cuadrado por segundo	m^2/s	$m^2 \cdot s^{-1}$
Intensidad de campo eléctrico	Voltio por metro	V/m ; N/C	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Intensidad de campo magnético	Amperio por metro	A/m	$m^{-1} \cdot A$
Fuerza magneto matriz	Amperio (espira)	A	A
Luminancia	Candela por metro cuadrado	cd/m^2	$m^{-2} \cdot Cd$
Número de ondas	Unidad por metro	1/m	m^{-1}
Entropía	Julio por kelvin	J/K	$m^2kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Calor específico	Julio por kilogramo-kelvin	$J/(kg \cdot K)$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Conductividad térmica	Vatio por metro-kelvin	$W/(m \cdot K)$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
Intensidad radiante	Vatio por estéreo radián	W/sr	$m^2 \cdot kg \bullet s^{-3} \cdot sr^{-1}$
Actividad	Unidad por Segundo (c)	1/s	s^{-1}

a) Los símbolos indicados en esta columna son los típicos de estas unidades.
b) Expresión en términos de unidades SI fundamentales y/o suplementarias.
c) Esta unidad es diferente del hertzio por cuanto se refiere a fenómenos no periódicos.

1.5.7. Múltiplos y submúltiplos de las unidades SI

Son magnitudes formadas mediante la multiplicación de las unidades SI por determinados factores numéricos decimales. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI, no son consideradas como unidades SI (a pesar de pertenecer al SI) por cuanto no forman un conjunto coherente.

Se usarán los PREFIJOS SI y sus símbolos para formar, respectivamente, los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI.

Con excepción de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI de masa, los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI fundamentales, suplementarias o derivadas que tengan nombres especiales, deberán formarse anteponiendo los prefijos a los nombres de las unidades, o los símbolos de los prefijos a los símbolos de las unidades.

Tabla 1.7 Prefijos SI

Múltiplos			**Submúltiplos**		
Nombre	**Símbolo**	**Factor**	**Nombre**	**Símbolo**	**Factor**
Yotta	Y	10^{24}	Yocto	y	10^{-24}
Zetta	Z	10^{21}	Zepto	z	10^{-21}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Tera	T	10^{12}	Pico	p	10^{-12}
Giga	G	10^{9}	Nano	n	10^{-9}
Mega	M	10^{6}	Micro	u	10^{-6}
Kilo	K	10^{3}	Mili	m	10^{-3}
Hecto	h	10^{2}	Centi	c	10^{-2}
Deca	D, da	10^{1}	Deci	d	10^{-1}

Ejemplos:

cm = centímetro = 10^{-2} m	prad = picoradián = 10^{-12} rad
mA = miliamperio= 10^{-3} A	nF = nanofaradio =10^{-9} F
MHz = megahertzio = 10^{6} Hz	KK = kilokelvin = 10^{3} K

1.5.8. Disposiciones generales

a) La división entre dos o más unidades se indicará mediante una línea inclinada, una línea horizontal o potencias negativas.

$$\mathrm{rad/s} \quad ; \quad \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \quad ; \quad \mathrm{s}^{-1} \times \mathrm{rad}$$

b) En el símbolo de una unidad derivada podrá aparecer solo una línea inclinada.

Ejemplos:

Escritura correcta: m^2/s ; $m \times s^{-2}$

Escritura incorrecta: m/s/s

c) Todas las unidades que aparezcan inmediatamente después de una línea inclinada serán consideradas como colocadas en el denominador de la expresión, y cuando sean dos o más deberán agruparse con paréntesis. Se recomienda no usar paréntesis para agrupar las unidades que aparezcan en el numerador (antes de la línea inclinada).

Ejemplos:

Escritura correcta: $m^2 \cdot kg/(s^2 \cdot K)$; $m \cdot kg/s$

Escritura incorrecta: $m^2 \cdot kg/s^2 \cdot K$; $m/kg \cdot s$

d) La palabra «POR» utilizada dentro del nombre de una unidad derivada, significará «PROPORCIÓN» y reemplazará a términos tales como «para», «sobre», «por cada», etc.

Ejemplo:

m/s = metro por segundo

N · m/c = Newton-metro por coulombio

e) No deberán combinarse nombres y signos al expresar el nombre de una unidad derivada:

Ejemplos:

Forma correcta: m/s o metro por segundo

Forma incorrecta: metro/segundo; m/segundo

f) Los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI de masa, deberán formarse anteponiendo los prefijos a la palabra «gramo», o los símbolos de los prefijos al símbolo «g» a pesar de que es el kilogramo y no el gramo, la unidad SI fundamental [1].

1.6. Análisis dimensional o relación entre magnitudes

Se han definido las magnitudes fundamentales como aquellas magnitudes independientes de otras, mientras que las magnitudes derivadas son las que se derivan de las magnitudes fundamentales y/o suplementarias. En este tema, queremos expresar la relación de las magnitudes derivadas con las fundamentales y/o suplementarias de las que se derivan. Estas relaciones o magnitudes derivadas (Dv.) en función de las magnitudes fundamentales y/o suplementarias se llaman «ANÁLISIS DIMENSIONAL». Para expresar estas ecuaciones, necesitamos utilizar una representación o simbología de las magnitudes fundamentales y suplementarias, que es la siguiente:

Tabla 1.8 Símbolo de magnitudes para expresiones dimensionales

N°	Magnitud	Símbolo
1	Longitud	*L*
2	Masa	*M*
3	Tiempo	*T*
4	Intensidad de corriente eléctrica	*I*
5	Temperatura termodinámica	*θ (Teta)*
6	Intensidad luminosa	ψ *(PSI)*
7	Cantidad de sustancia	*N (NU)*
8	Ángulo plano	*α (ALFA)*
9	Ángulo sólido	ω (OMEGA)

Cuando queremos hacer un «ANÁLISIS DIMENSIONAL», recomendamos que, en primer lugar, se determine una relación entre unidades, y se la exprese de manera ordenada como en la siguiente relación general:

$$D = \mathrm{m}^{a} \cdot \mathrm{kg}^{b} \cdot \mathrm{s}^{c} \cdot \mathrm{A}^{d} \cdot \mathrm{K}^{e} \cdot \mathrm{Cd}^{f} \cdot \mathrm{mol}^{g} \cdot \mathrm{rad}^{h} \cdot \mathrm{sr}^{i} \qquad (1.1)$$

En donde:

D = unidad de una magnitud derivada

m, kg, S, …, Sr= unidades fundamentales y suplementarias

a, b, c, …, i= números enteros (+) o (-)

Una vez que se dispone de la Ec (1.1) pasamos a representar la ecuación que muestra el análisis dimensional propiamente dicho que es la siguiente:

$$[Dv] = [La \cdot Mb \cdot Tc \cdot Id \cdot \theta e \cdot \psi f \cdot Ng \cdot \alpha h \cdot \omega i] \qquad (1.2)$$

En donde:

Dv = magnitudes derivadas

L, M, T, …, W = símbolos magnitudes fundamentales y suplementarias en orden

a, b, c, …, i = números enteros (+) o (-)

Ejemplo 1.1

Exprese la ecuación dimensional para la fuerza (FR):

Solución

- En primer lugar, hallamos la relación entre unidades. En este caso de la unidad de fuerza [Newton (N)] en función de unidades solo fundamentales:
- Para ello consultamos una definición cuantitativa de la fuerza (FR). Según Newton tenemos que:

$$FR = m \cdot a \ (A)$$

En donde:

m = masa se mide en kg

a = aceleración que se mide en m/s^2

Partiendo de (A) encontramos una relación entre unidades:

$$N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

- Ahora ordenamos esta relación de acuerdo con la ecuación (1.1)

$$N = \mathrm{m} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

- Finalmente partiendo de esta relación expresamos la ecuación dimensional para la fuerza en la forma ordenada de la ecuación (1.2).

$$[FR] = [L \cdot M \cdot T^{-2}]$$

Ejemplo 1.2

A. Exprese la ecuación dimensional para el trabajo (TR).

Solución

- Para expresar la relación entre unidades, consultamos una definición cuantitativa del trabajo.

$$\mathrm{TR} = \mathrm{F_R} \cdot \mathrm{X}\ (\mathrm{B})$$

En donde:

TR = trabajo [mide en Joule (J)]

FR = fuerza (mide en N)

X = desplazamiento (mide en m)

De acuerdo con (B) encontramos:

$$\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

Como: $N = \mathrm{kg} \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Nos queda: $J = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2 \cdot \mathrm{m}$
$J = \mathrm{kg}\ \ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

Ordenado: $J = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

B. Ahora expresamos la ecuación dimensional para el trabajo, que sería la misma para la energía:

$$[TR] = [L^2 \cdot M \cdot T^{-2}]$$

Ejemplo 1.3

A. Exprese la ecuación dimensional para la diferencia de potencial o voltaje (Vab).

Solución

- Para expresar la relación entre unidades, consultamos una definición cuantitativa de voltaje (Vab):

$$Vab = \frac{TR}{q} \quad (C)$$

En donde:

Vab = diferencia de potencial (ddp) o voltaje [mide en voltio (V)]

TR = trabajo (mide en J)

q = carga eléctrica [mide en culombio (C)]

De acuerdo con (C) encontramos:

$$V = \frac{J}{C} \quad (D)$$

B. Ahora, para determinar una relación del culombio (C), consultamos una definición de carga eléctrica (q).

$$q = i \cdot t \quad (E)$$

En donde:

i = intensidad de corriente [mide en amperio (A)]

t = tiempo [mide en segundo (s)]

De acuerdo con (E) encontramos:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{S}$$

Remplazando en (D) tenemos:

$$J = N \cdot m$$

$$V = \frac{N \cdot m}{A \cdot S}$$

Como: $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Tenemos: $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}}{\dfrac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{S}}{1}}$

Luego: $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{S}^3}$

Ordenando de acuerdo con la ecuación (1.1): $\mathrm{V} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$

C. Estamos en condiciones de expresar la ecuación dimensional para la diferencia de potencial (ddp) o voltaje (Vab):

$$[\mathrm{Vab}] = [\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{I}^{-1}]$$

Estos ejemplos utilizando las ecuaciones (1.1) y (1.2) sobre la base del Sistema Internacional de Unidades (SI) se considera que han sido analizados dentro de los sistemas absolutos de unidades (SA), pero a la vez también se podría analizarlos en los sistemas gravitacionales (SG) en los que se consideran los sistemas técnico, inglés, etc. Si se desea hacerlo en los sistemas gravitacionales (SG) se sugiere que se analice en primer lugar dentro de los sistemas absolutos (SI) y luego simplemente las relaciones dimensionales se las pase al sistema gravitacional (SG) o técnico utilizando la relación dimensional obtenida para la fuerza (FR).

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-2}] \quad (\mathrm{E})$$

Esta relación nos permitiría pasar de sistemas gravitacionales (SG) a sistemas absolutos (SA) y, despejando [M], nos quedaría:

$$[\mathrm{M}] = [\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}^2] \quad (\mathrm{F})$$

En cambio, esta relación nos servirá para pasar de sistemas absolutos (SA) a sistemas gravitacionales (SG) debido a que la única diferencia entre estos sistemas es de que en los absolutos se considera a la masa (M) magnitud fundamental y en los gravitacionales, en lugar de la masa, se considera a la fuerza (F) como magnitud fundamental.

Ejemplo 1.4

A. Exprese la ecuación dimensional para el trabajo (TR) en sistemas gravitacionales (SG)

Solución

Simplemente, el resultado obtenido en el ejemplo anterior para el trabajo, que está en sistemas absolutos (SA), lo pasamos a sistemas gravitacionales (SG) reemplazando la ecuación (F) en este:

$$[TR] = [L^2 \cdot M \cdot T^{-2}] \rightarrow (S.A.)$$
$$[TR] = [L^2 (L^{-1} \cdot F \cdot T^2) \cdot T^{-2}]$$
$$[TR] = [L^2 \cdot L^{-1} \cdot F \cdot T^2 \cdot T^{-2}] = [L \cdot F \cdot T^0]$$
$$[TR] = [L \cdot F] \rightarrow (S.G.)$$

B. Exprese la ecuación dimensional para la diferencia de potencial o voltaje (Vab) en sistemas gravitacionales (SG). Procedemos de igual forma:

El resultado obtenido anteriormente:

$$[Vab] = [L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}] \rightarrow (S.A.)$$

Lo pasamos a SG a través de la relación (F):

$$[Vab] = \left[L^{2} \cdot \left(L^{-1} \cdot F \cdot T^{-2}\right) \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}\right] = \left[L^{\cancel{2}} \cdot L^{\cancel{-1}} \cdot F \cdot T^{\cancel{-2}} \cdot T^{\cancel{3}} \cdot I^{\cancel{-1}}\right]$$

$$[Vab] = \left[L \cdot F \cdot T^{-1} \cdot I^{-1}\right] \rightarrow (S.G.)$$

Para darle mayor aplicabilidad al análisis dimensional, consideremos las siguientes reglas:

- Toda ecuación entre unidades (1.1) o ecuación dimensional (1.2) debe regirse por reglas algebraicas.
- Una ecuación se la puede expresar solo entre unidades (1.1) o ecuación dimensional (1.2): reemplazando por la unidad (1) a: los números reales que no figuren como exponentes de alguna magnitud dimensional, a las constantes adimensionales, a las funciones trigonométricas de ángulos, a los logaritmos de números naturales, es decir a constantes sin unidades.
- Toda unidad física o dimensión elevada a la cero (0) es igual a la unidad (1)

$$m^{0} = kg^{0} = S^{0} = A^{0}\, L^{0}\, M^{0} = T^{0} = I^{0} = 1$$

- Toda ecuación dimensional se debe presentar entre corchetes [2].

Ejemplo 1.5

La ley de la gravitación universal establece que:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{d^{2}}$$

En donde:

F = fuerza de atracción gravitacional

m_1, m_2 = masas de las partículas

d = distancia entre masas

A. Haga el análisis dimensional para la constante de gravitación universal G en los sistemas absolutos y gravitacionales.

Solución

En primer lugar, identificamos las unidades de las magnitudes conocidas en unidades fundamentales del SI (sistema absoluto).

$$F = N = m \cdot kg \cdot s^{-2}$$
$$m_1, m_2 = kg$$
$$d = m$$

Reemplazamos las unidades en la fórmula y despejamos la constante G.

$$m \cdot kg \cdot s^{-2} = G \frac{kg \cdot kg}{m^2} \therefore$$
$$G = \frac{m^2 \cdot m \cdot kg \cdot s^{-2}}{kg^2} = \frac{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}{1}$$
$$G = m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

Pasamos a dimensiones (representación de magnitudes):

$$[G] = [L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}]$$

Este análisis está en sistemas absolutos (SA) lo pasamos a sistemas gravitacionales (SG) al reemplazar el valor de la masa.

$$[M] = [L^{-1} \cdot F \cdot T^{2}] \quad (F) \text{ y obtenemos:}$$

$$[G] = \left[L^{3} \left(L^{-1} \cdot F \cdot T^{2}\right)^{-1} \cdot T^{-2}\right] = [L^{3} \cdot L \cdot F^{-1} \cdot T^{-2} \cdot T^{-2}]$$

$$[G] = [L^{4} \cdot F^{-1} \cdot T^{-4}] \rightarrow (\text{relación en sistemas gravitacionales S.G})$$

Ejemplo 1.6

Un estudiante necesita recordar la ecuación que relaciona a la posición X de la partícula en función del tiempo (t) en el MRUV y no está seguro de cuál de las tres relaciones es la correcta:

$$X = X_0 t + v_0 + 1/2 \ at^2$$
$$X = X_0 + 1/2 \ v_0 t + at$$
$$X = X_0 + v_0 t + 1/2 \ at^2$$

En donde:

X, X_0 = distancias

a = aceleración lineal

v_0 = velocidad inicial

t = tiempo

Demuestre, realizando un análisis dimensional de las ecuaciones presentadas, ¿cuál de ellas es la correcta?

Solución

Para que una ecuación sea dimensionalmente correcta todos los términos deben tener las mismas unidades y/o dimensiones de acuerdo con el álgebra. Comprobamos esto, realizando el respectivo análisis.

Con la primera ecuación:

$$m = m\cdot s + m\cdot s^{-1} + m\cdot s^{-2}\cdot s^{2}$$
$$m = m\cdot s + m\cdot s^{-1} + m$$
$$[L] = [LT] + [LT^{-1}] + [L]$$

Como las dimensiones de todos los términos en esta ecuación no son iguales, la ecuación es incorrecta.

Con la segunda ecuación:

$$m = m + m\cdot s^{-1}\cdot s + m\cdot s^{-2}\cdot s$$
$$m = m + m + m\cdot s^{-1}$$
$$[L] = [L] + [L] + [LT^{-1}]$$

De manera similar, no es la correcta.

Con la tercera ecuación tenemos:

$$m = m + m\cdot s^{-1}\cdot s + m\cdot s^{-2}\cdot s^{2}$$
$$m = m + m + m$$
$$[L] = [L] + [L] + [L]$$

Luego definimos que esta es la ecuación correcta.

Ejemplo 1.7

La expresión: $P = 2Xt^2 \cdot \mathrm{Log}(\pi) + Yd + ZF$

Es dimensionalmente correcta donde:

P= presión; t= tiempo; d= densidad de masa; F= fuerza

Encontrar las relaciones dimensionales para [X], [Y] y [Z].

Solución

En primer lugar, identificamos las unidades de las magnitudes conocidas y las expresamos en unidades fundamentales del SI.

$$P = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2} \; ; \quad t = s \; ; \quad d = m^{-3} \cdot kg \; ; \quad F = m \cdot kg \cdot s^{-2}$$

Si la expresión presentada es dimensionalmente correcta, significa que las unidades y/o dimensiones de cada término de esta deben ser iguales, según el álgebra; por lo tanto, en unidades, las del primer término (presión) deben ser iguales a las de cualquier otro término, así:

$$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2} = Xs^2 \text{ ; despejando X tenemos :}$$

$$X = \frac{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}}{s^2} = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot s^{-2} = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-4} \text{ y en dimensiones:}$$

$$[X] = [L^{-1} \cdot M \cdot T^{-4}]$$

Luego:

$$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2} = Y \cdot m^{-3} \cdot kg \text{ ; despejando y tenemos}$$

$$Y = \frac{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}}{m^{-3} \cdot kg} = m^{-1} \cdot m^3 \cdot kg \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} = m^2 \cdot s^{-2}$$

$$[Y] = [L^2 \cdot T^{-2}]$$

Y finalmente:

$$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2} = Z\cdot m\cdot kg\cdot s^{-2}\ ;\ \text{Despejando } Z:$$

$$Z = \frac{m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}}{m\cdot kg\cdot s^{-2}} = m^{-1}\cdot m^{-1}\cdot kg\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}\cdot s^{2} = m^{-2}$$

$$[Z] = [L^{-2}]$$

Ejemplo 1.8

La fuerza centrípeta (Fc) depende de la masa (m), de la rapidez lineal (v) y del radio de giro del cuerpo en rotación (r).

Hallar la fórmula para la fuerza centrípeta.

Solución

Si no recordamos exactamente una fórmula, pero, estamos seguros de que la fórmula depende de un solo término compuesto de varios factores entre magnitudes que sí sabemos cuáles son, lo que se hace es lo siguiente:

$$Fc = m^{x}\, v^{y}\, r^{z}$$

Es decir, elevamos a exponentes desconocidos las magnitudes identificadas y, realizando un análisis de unidades y/o dimensiones, se determinan los exponentes (x, y, z) así:

$$Fc = m\cdot kg\cdot s^{-2}\ ;\ m = kg\ ;\ v = m\cdot s^{-1}\ ;\ r = m$$

$$m \cdot kg \cdot s^{-2} = kg^{x} \cdot (m \cdot s^{-1})^{y} m^{z}$$

$$m \cdot kg \cdot s^{-2} = kg^{x} \cdot m^{y} \cdot s^{-y} m^{z}$$

$$m \cdot kg \cdot s^{-2} = m^{y+z} \cdot kg^{x} \cdot s^{-y}$$

En Dimensiones:

$$[L \cdot M \cdot T^{-2}] = [L^{y+z} \cdot M^{x} \cdot T^{-y}]$$

Para que la ecuación anterior sea una igualdad, el primer miembro debe ser igual al segundo, y para que esto sea así, los exponentes de cada dimensión deben ser iguales:

$$Y + Z = 1 \qquad (1)$$

$$X = 1$$

$$-Y = -2 = Y = 2 \quad \text{en} \quad (1) \quad Z=1 - Y=1-2=-1$$

$$Z = -1$$

Con estos valores de X, Y y Z se puede definir la fórmula [3].

$$Fc = m \cdot v^{2} \cdot r^{-1} = Fc = mv^{2}/r$$

1.7. Conversión de unidades

Debido a que la humanidad no utiliza un sistema único universal de unidades, una misma magnitud se mide en diferentes unidades. Por ejemplo la longitud se expresa en metros (m), en pies (ft), en pulgadas (pul), en millas, en angstrom (Å), en año luz, etc.

Entonces, debemos saber cómo pasar de la longitud m, o en pie, a otras unidades, que nos interesen. Para ello es necesario saber las relaciones entre estas unidades, a las que llamamos «factores de conversión». La ciencia considera a las unidades de medida como cantidades algebraicas, y así se las puede operar como en el álgebra.

Nota: en este texto se utilizará el punto (.) en lugar de la coma (,) para simbolizar cifras decimales tanto en los ejercicios como en las tablas de factores de conversión, y para separar cifras enteras de tres en tres (miles, millones) no se empleará ningún símbolo como separador.

Ejemplo 1.9

Transformar 58 pies a m

Solución

Para pasar de pie a m, consultamos la relación que existe entre estas dos unidades y encontramos que este factor de conversión es:

$$1 \cdot 1\,\text{m} = 3.28\ \text{pie} \cdot 1$$

La ecuación anterior expresada en forma de cociente sería:

$$\frac{1\,\text{m}}{3.28\ \text{pie}} = 1$$

$$\frac{3.28\ \text{pie}}{1\,\text{m}} = 1$$

Son relaciones iguales o equivalentes. Entonces, para transformar de pie a m, multiplicamos nuestra magnitud (58 pies) por un factor de conversión en forma de cociente, por el adecuado para simplificar los pies y que nos resulte en m, así:

$$58\ \cancel{\text{pie}} \times \frac{1\,\text{m}}{3.28\ \cancel{\text{pie}}} = 17.68\,\text{m} \qquad \text{RESP.}$$

Como hemos demostrado, un factor de conversión colocado en forma de cociente es igual a la unidad (1). Por lo tanto, usted puede multiplicar una magnitud por varios factores de conversión colocados en forma de cocientes, que jamás alterará su magnitud, ya que los está multiplicando por uno, y usted puede multiplicar por cualquier cantidad de unidades, que la magnitud no cambiará [4].

Ejemplo 1.10

Transformar 550 pul a m.

Solución

Consultamos factores de conversión y encontramos:

$$1\,\mathrm{m} = 3.28\ \mathrm{pie}$$

$$1\ \mathrm{pie} = 12\ \mathrm{pul}$$

$$550\ \cancel{\mathrm{pul}} \times \frac{1\ \cancel{\mathrm{pie}}}{12\ \cancel{\mathrm{pul}}} \times \frac{1\,\mathrm{m}}{3.28\ \cancel{\mathrm{pie}}} = 14\,\mathrm{m} \qquad \text{RESP.}$$

Usted puede hallar factores de conversión de diferentes unidades en muchos textos de física, química, u otras ciencias, como también en folletos y tablas preparadas exclusivamente con este objeto.

Sin embargo, también queremos proporcionarle algunos «factores de conversión» para algunas magnitudes principales [5].

TABLA 1.9 Factores de conversión

Unidades de longitud	
1 m	3.28 pie = 39.4 pul
1 milla	1609 m [milla terrestre (milla)]
1 pie	12 pul
1 yarda	0.9144 m
1 milla náutica	1852 m
1(Ã) (Ãngstrom)	10^{-10} m
1 UA	1.495 $x10^{11}$ m
1 año luz	9.46 x 10^{15} m
1 parsec	3.048 x 10^{10} m
Unidades de superficie (ÁREA)	
$1m^2 = 10^4$ $cm^2 = 10.76$ $pie^2 = 1550$ pul^2	
1 acre	4047 m^2
1 ha	10^{-4} m^2
Unidades de volumen	
1 $m^3 = 10^6$ cm^3 = 103 l = 35.3 pie^3 = 264 galones	
1 l = 10^3 cm^3 = 1.057 cuartos = 0.264 galones = 1000 cm^3	
1 barril = 42 galones = 159 l = 0.159 m^3	
Unidades de masa	
1 kg	1000 g = 2.205 lb
1 oz	28.35 g
1 slug	14.59 kg = 32.17 lb
1 vam	$1.66x10^{-24}$ g = 1.66 x 10^{-27} kg
1 UTM	9.8 kg
Unidades de fuerza	
1 N	10^5 dina = 0.2248 lbf = 7.233 poundal
1 lbf	4.448 N = $4.448x10^{-6}$ lbf = 32.17 poundal
1 dina	10^{-5} N = $2.2248x10^{-6}$ lbf = $7.233x10^{-5}$ poundal
1 kgf	$9.81x10^5$ dina = 9.81 N
Unidades de energía	
1J	1N.m =10^7 erg = 0.7376 lbf-pie = $9.481x10^{-4}$ BTU
1 J	2.778 x 10^{-7} kWh = 0.2390 Cal = $2.390x10^{-4}$ kcal
1 erg	10^{-7} J = 1 dina-cm
1 HPh	1.014 CVh

Unidades de potencia	
1BTU/s	0.252 kcal/s
1HP	1.014 CV
1W	10-3 kW = 0.00136 CV = 0. 102 m.kgf/s = 0.86 kcal/h
Unidades de trabajo	
1 J	0.278x10-6 kWh = 0.378x10-6 CVh = 0.102 m.kgf
1 Kcal	4186 J = 1.16x10-3 KWh = 1.58x10-3 CVh = 426.9 m.kgf

Unidades de presión							
	atm	**dina/cm²**	**pul de agua**	**cm Hg**	**Pascal**	**lbf/pul²**	**lbf/pie²**
1 atmósfera =	1	$1.013 x10^{6}$	406.8	76	$1.013 x10^{5}$	14.70	2116
1dina por centímetro cuadrado =	$9.869 x10^{-A}$	1	$4.015 x10^{4}$	$7.501 x10^{5}$	0.1	$1.450 x10^{5}$	$2.089 x10^{-3}$
1pulgada de agua a °C =	$2.458 x10^{-3}$	2491	1	0.1868	249.1	$3.613 x10^{2}$	5.202
1centímetro de mercurio a 0 °C =	$1.316 x10^{-2}$	$1.333 x10^{4}$	5.353	1	1333	0.1934	27.85
1 pascal =	$9.869 x10\text{-}^{6}$	10	$4.015 x10^{-3}$	$7.501 x10^{4}$	1	$1.450 x10^{-4}$	$2.089 x10^{-2}$
1libra fuerza por pulgada cuadrada=	$6.805 x10^{-2}$	$6.895 x10^{4}$	27.68	5.171	$6.895 x10^{-3}$	1	144
1libra fuerza por pie cuadrado=	$4.725 x10^{-4}$	478.8	0.1922	$3.591 x10^{-2}$	47.88	$6.944 x10^{-3}$	1

Ejemplo 1.11

A. Convertir 1200 millas a angstrom (Ā)

Solución

$$1200\ \cancel{\text{milla}} \times \frac{1609\ \cancel{m}}{1\ \cancel{\text{milla}}} \times \frac{1\ \tilde{A}}{10^{-10}\ \cancel{m}} = 1.9308 \times 10^{16}\ \tilde{A} \quad \text{RESP.}$$

B. Convertir 5200 Pm a pie

Solución

$$5200\ \cancel{Pm} \times \frac{10^{15}\ \cancel{m}}{1\ \cancel{Pm}} \times \frac{1\ \cancel{pul}}{2.54\ \cancel{cm}} \times \frac{100\ \cancel{cm}}{1\ \cancel{m}} \times \frac{1\ pie}{12\ \cancel{pul}} = 1.7 \times 10^{19} pie \qquad RESP.$$

C. Convertir 5 años luz a yarda.

Solución

$$5\ \cancel{años luz} \times \frac{9.461 \times 10^{12}\ \cancel{km}}{1\ \cancel{año luz}} \times \frac{10^{3}\ \cancel{m}}{1\ \cancel{km}} \times \frac{1\ yarda}{0.9144\ \cancel{m}} = 5.17 \times 10^{16} yarda \qquad RESP.$$

D. Convertir 325 Tm^2 a pul^2

Solución

$$325\ \cancel{Tm}^{2} \times \frac{\left(10^{12}\ \cancel{m}\right)^2}{\left(1\ T\cancel{m}\right)^2} \times \frac{\left(3.28\ \cancel{pie}\right)^2}{\left(1\ \cancel{m}\right)^2} \times \frac{\left(12 pul\right)^2}{\left(1\ \cancel{pie}\right)^2} = 5.037 \times 10^{29} pul^2 \qquad RESP.$$

Ejemplo 1.12

Una partícula tiene una masa de 1200 UTM y parte del reposo (v_0 = m/s), acelera uniformemente hasta alcanzar una velocidad final (v) de 120 milla/h, en un tiempo (t) de 1.5 x 10^{-3} h. Determine la fuerza (F) aplicada a la partícula en el SI, sabiendo que: $F = m \cdot a$; $a = (v\text{-}v_0)/t$.

Datos:

$$M = 1200\,\text{UTM} \times \frac{9.8\ \text{kg}}{\text{UTM}} = 11760\ \text{kg}$$

$$v_0 = 0\,\text{m/s}$$

$$v = 120\ \frac{\text{milla}}{\text{hora}} \times \frac{1609\,\text{m}}{\text{milla}} \times \frac{\text{h}}{3600\ \text{s}} = 53.63\ \text{m/s}$$

$$t = 1.5 \times 10^{-3}\text{h} \times \frac{3600\ \text{s}}{\text{h}} = 5.4\ \text{s}$$

$$F = ?\,(\text{SI})$$

Solución

Antes de reemplazar las magnitudes en las respectivas fórmulas, se sugiere que todas se transformen a un mismo sistema de unidades, en este caso al SI (lo que se hizo adjunto en los datos).

- Cálculo de la aceleración (a):

$$a = \frac{(53.63 - 0)\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5.4\,\text{s}} \quad \Rightarrow \quad a = 9.93\ \text{m/s}^2$$

- Cálculo de la fuerza (F):

$$F = m \cdot a = 11760\ \text{kg} \times 9.93\ \text{m/s}^2$$

$$F = 116776.8\ \text{N}$$

Ejemplo 1.13

Una muestra de ácido sulfúrico concentrado es de 95.7 % en peso de H_2SO_4 y su densidad es 1.84 g/cm^3.

a. ¿Cuántos gramos de H_2SO_4 puro contiene 1l de ácido?

b. ¿Cuántos cm^3 de ácido contienen 100 g de H_2SO_4 puro?

Solución

Datos:

Concentración muestra : 95.7 % de H_2SO_4 .

$$\rho = 1.84\,\mathrm{g/cm^3}$$

$$v = 1l \times \frac{1000\,\mathrm{cm^3}}{1l} = 1000\,\mathrm{cm^3}$$

$$a)\ m = \rho v \times 95.7\%$$

$$m = 1.84\ \mathrm{g/cm^3} \times 1000\,\mathrm{cm^3} \times \frac{95.7}{100}$$

$$m = 1760.9\,\mathrm{g}$$

$$m = 100\mathrm{g}\ (H_2SO_4\ \ Puro)$$

$$b)\ v = \frac{m}{l} = \frac{100\mathrm{g}}{1.84\,\mathrm{g/cm^3}}$$

$$v = 54.3\,\mathrm{cm^3}$$

Para una conversión de escalas termométricas son útiles las siguientes relaciones:

$$[6].\ \frac{\mathrm{Re}}{4} = \frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{K-273}{5} = \frac{R-492}{9}$$

Re = grados Reamur

K= Kelvin

C = grados Celsius

R = Rankine

F= grados Fahrenheit

CAPÍTULO II. EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE UNIDADES Y MEDIDAS

1.1. EJERCICIOS RESUELTOS

- Sen, cos y tan entre paréntesis solo las que tengan ángulo

Se presentan los siguientes ejercicios resueltos [7].

1. La siguiente ecuación nos define la velocidad (V) en función del tiempo (T) de un cuerpo que se desplaza sobre una superficie horizontal. Hallar [W].

(a) LMT^{-1} (b) LT^{-1} (c) T^{-1} (d) T^{-2} (e) T^{-3}

$$V = AW\ \cos(WT)$$
$$V = velocidad\ (m\ s^{-1}) = [LT^{-1}]; T = Tiempo\ (s) = [T]$$

Como el argumento de la función cos: debe ser un ángulo:

$$WT = \theta(\acute{a}ngulo)(rad) = \text{adimensional} = 1$$
$$WT = 1 \Rightarrow W = \frac{L}{T} = T^{-1}[W] = [T^{-1}] \Rightarrow (C)\ \text{RESP}\ (\text{c}).$$

2. La fórmula de la energía está dada por $E = \dfrac{sen\ (w)}{z}$.

Si W = ángulo de incidencia. Hallar [Z]

(a) $M^{-1}L^{-2}T^{-2}$ **(b)** ML^{2} **(c)** $M^{-1}L^{2}T$ **(d)** LT^{-1}

E = energía (J = Nm = m kg s^{-2} m = m^2 kg s^{-2}) = [L^2MT^{-2}]

W = ángulo de incidencia (rad) = adimensional = 1

Reemplazando dimensiones en la ecuación tenemos:

$$L^2MT^{-2} = \frac{1}{Z} \Rightarrow Z = \frac{1}{L^2MT^{-2}} = L^{-2}M^{-1}T^{2}$$

$$[Z] = [L^{-2}M^{-1}T^{2}] \Rightarrow RESP.\ (a)$$

3. La ecuación de estado de un gas ideal es $PV = nRT$

P = presión $\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right) = L^{-1}MT^{-2}$

V = volumen (m^3) = [L^3]

n = cantidad de sustancia (mol) = [N]

T = temperatura termodinámica (K) = [θ]

Determinar la fórmula dimensional de la constante universal de los gases [R]

(a) 1 **(b)** $L^2M^2T^2$ **(c)** $L^2M^2T^2\theta^{-1}$ **(d)** $L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$ **(e)** $L^2M^2T^2\theta^{-1}N^{-2}$

Reemplazando dimensiones:

$$L^{-1}MT^{-2}L^3 = NR\,\theta \Rightarrow R = \frac{L^{-1}MT^{-2}L^3}{\theta N} = L^{-1}MT^{-2}\ \theta^{-1}N^{-1}$$

$$[R] = [L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}] \Rightarrow RESP.\,(d)$$

4. Indique la fórmula que no satisface el principio de homogeneidad dimensional, si se sabe que:

d = desplazamiento (m) = [L]

V_0 = velocidad inicial (ms^{-1}) = [LT^{-1}]

V = velocidad final (ms^{-1}) = [LT^{-1}]

a = aceleración (ms^{-2}) = [LT^{-2}]

g = aceleración de gravedad (ms^{-2}) = [LT^{-2}]

t = tiempo (s) = [T]

h = altura (m) = [L]

$$\textbf{(a)}\quad V^2 = (V_0) + 2ad \quad \textbf{(b)}\ d = \frac{(V_0)^2 sen\ (2\theta)}{g} \quad \textbf{(c)}\ d = (V_0)t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\textbf{(d)}\ h = \frac{(V_0)\,sen\ (2\theta)}{2g} \quad \textbf{(e)}\ t = \frac{2V_0\ sen\ \theta}{g}$$

Reemplazando dimensiones comprobamos cuál no es homogénea:

a.
$$V^2 = V_0^2 + 2ad \Rightarrow [LT^{-1}]^2 = [LT^{-1}]^2 + [LT^{-2}][L]$$
$$L^2T^{-2} = L^2T^{-2} + L^2T^{-2}$$

Es homogénea porque todos los términos tienen las mismas dimensiones.

b.
$$d = \frac{V_0^{\,2}\,sen\ (2\theta)}{g} \Rightarrow L = \frac{(LT^{-1})(1)}{LT^{-1}} = L^2T^{-2} \neq L^{-1}T^{2}$$
$$[L] = [L]$$

Sí es homogénea.

c. $$d = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow L = LT^{-1}\cdot T + LT^{-2}T^2 \Rightarrow L = L + L$$

Sí es homogénea.

d.
$$h = \frac{V_0 sen\ (2\theta)}{g} \Rightarrow L = \frac{LT^{-1}(1)}{LT^{-2}} = LL^{-1}T^{-1}T^2 = T$$
$$[L] = [T]$$

No es homogénea.

$$e. \quad t = \frac{2V_0 sen\ \theta}{g} \Rightarrow T = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}} = T \Rightarrow [T] = [T]$$

Sí es homogénea.

5. Dadas las siguientes expresiones, encontrar [A]:

$$1) \quad V = \frac{A + B}{C} \qquad\qquad 2) \quad F = \frac{(A + B)^2}{C}$$

V = velocidad $[LT^{-1}]$

F = fuerza$[LTM^{-1}]$

(a) MLT^{-2} **(b)** MT **(c)** MT^{-2} **(d)** MT^{-1}

Reemplazamos dimensiones en 1 y 2

$$\frac{A + B}{C} = LT^{-1}$$

Para que sea dimensionalmente, las dimensiones de A deben ser las mismas de B: $[A] = [B]$

$$\frac{A}{C} = LT^{-1} \Rightarrow C = \frac{A}{LT^{-1}} \qquad (\text{Ec. 1a})$$

$$\frac{(A + B)^2}{C} = LMT^{-2} \qquad \text{como} \quad [A] = [B]$$

$$\frac{A^2}{C} = LMT^{-2} \qquad (\text{Ec. 2a})$$

Reemplazando la (Ec. 1 a) en la (Ec. 2 a)

$$\frac{\dfrac{A^2}{1}}{\dfrac{A}{LT^{-1}}} = LMT^{-2} \Rightarrow \frac{\cancel{A^2}LT^{-1}}{\cancel{A}} = LMT^{-2} \Rightarrow A = \frac{LMT^{-2}}{LT^{-1}}$$

$$A = LMT^{-2} \cdot L^{-1} \cdot T = L^0MT^{-1} \Rightarrow [A] = MT^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{RESP.(d)}$$

6. El volumen del fluido que pasa en unidad de tiempo por un tubo capilar está dado por:

$$V = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi R^4}{8L} P$$

V = volumen/tiempo = $\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = [V] = [L^3T^{-1}]$

R = radio = $[L]$

L = longitud = $[L]$

P = presión = $[L^{-1}MT^{-2}]$

Hallar la fórmula dimensional de la viscosidad $[n]$:

(a) $L^{-1}MT^{-1}$ **(b)** L^2MT^2 **(c)** LMT^2 **(d)** $L^{-1}MT^{-2}$ **(e)** LT^{-3}

Despejando n tenemos:

$$n = \frac{R^4 \cdot P}{V \cdot L}$$

$$n = \frac{\cancel{L^4}L^{-1}MT^{-2}}{\cancel{L^3}T^{-1}\cancel{L}} = L^{-1}MT^{-2}T$$

$$[n] = [L^{-1}MT^{-1}] \Rightarrow \text{RESP.}(\text{a})$$

7. ¿Cuál es la fórmula dimensional de X para que la expresión sea dimensionalmente correcta?

$$X = \frac{W}{m\left(b^2 + h^2\right)}$$

W = trabajo = m^2 · kg . s^{-2} = [L^2MT^{-2}]

m = masa = [M]

h = altura = [L]

(a) L^2 **(b)** ML^2 **(c)** MT^2 **(d)** T^{-2}

Reemplazando dimensiones, en el denominador como deben tener las mismas dimensiones [b^2] = [L^2]

$$X = \frac{\cancel{L^2}\,\cancel{M}T^{-2}}{\cancel{M}\left(\cancel{L^2}\right)} \Rightarrow \left[X\right] = \left[T^{-2}\right] \qquad \text{RESP.}(\text{d})$$

8. La velocidad de una partícula en el interior de un fluido está dada por la fórmula:

$$V = \frac{a + \dfrac{b}{t} + \dfrac{b}{t} + \dfrac{c}{V_0}}{(L + m - 2n)R}$$

V = velocidad [LT^{-1}]

V$_0$ = velocidad [LT^{-1}]

t = tiempo [T]

R = radio = [L]

L, m, n = números = 1

Hallar las dimensiones de: $E = \dfrac{bc}{a^2}$

(a) LT^{-2} **(b)** $L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ **(c)** L^2T^3 **(d)** T^{-3} **(e)** L

Pasamos a dimensiones la ecuación:

$$LT^{-1} = \frac{a + \dfrac{b}{T} + \dfrac{b}{T} + \dfrac{c}{LT^{-1}}}{L}$$

$$L^2T^{-1} = a + \frac{b}{T} + \frac{c}{LT^{-1}}$$

$$[a] = [L^2T^{-1}]$$

$$\frac{b}{T} = L^2T^{-1} \Rightarrow [b] = [L^2]$$

$$\frac{C}{LT^{-1}} = L^2T^{-1} \Rightarrow C = L^2T^{-1} \cdot LT^{-1} \Rightarrow [C] = L^3T^{-2}$$

$$Luego:\ E = \frac{bC}{a^2} = \frac{L^2L^3T^{-2}}{(L^2T^{-1})^2} = \frac{L^5\cancel{T^{-2}}}{L^4\cancel{T^{-2}}} = L$$

$$[E] = [L] \quad \Rightarrow \quad RESP.(e)$$

9. Hallar la fórmula dimensional de x e y.

$$XV\sqrt{\sqrt{3}} + D sen\ 37° = Y A L^2$$

V= velocidad [LT^{-1}]

A = área

D = densidad

L = longitud

(a) ML, L^2T **(b)** ML^2T, LT **(c)** ML^2, LT^{-1} **(d)** $ML^{-4}T, ML^{-7}$ **(e)** L^2, T^{-1}

Reemplazando dimensiones, todos los términos deben tener las mismas dimensiones:

$$[XV]=[D]\Rightarrow XLT^{-1}=L^{-3}M$$

$$[X]=\frac{L^{-3}M}{LT^{-1}}=L^{-3}\cdot L^{-1}\cdot M\cdot T$$

$$[X]=[L^{-4}\cdot M\cdot T]\Rightarrow \text{RESP.}(\text{d})$$

$$[YAL^{2}]=D\Rightarrow Y\cdot L^{2}\cdot L^{2}=L^{-3}M$$

$$Y=\frac{L^{-3}M}{L^{4}}=L^{-3}L^{-4}M=L^{-7}M$$

$$[Y]=[L^{-7}M]\Rightarrow \text{RESP.}(\text{d})$$

$$[X]=[ML^{-4}T] \qquad ; \qquad [Y]=[ML^{-7}]$$

10. En la siguiente ecuación homogénea:

$$HF=\rho w^{x}+m_{0}\frac{V^{y}}{r}$$

Hallar:

F = fuerza = [LMT^{-2}]

m$_0$ = masa = [M]

V = velocidad [LT^{-1}]

r = radio de giro = [L]

ρ = cantidad de movimiento = (masa o velocidad) = [LMT^{-1}]

w = velocidad angular (ángulo/tiempo) = $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ = s^{-1}= $\left[T^{-1}\right]$

(a) 1 **(b)** -1 **(c)** 0 **(d)** 2 **(e)** -2

Sustituimos dimensiones:

$$LMT^{-2} = \frac{LMT^{-1}\left(T^{-1}\right)^{x}}{H} + \frac{M\left(LT^{-1}\right)^{y}}{HL}$$

$$\frac{LMT^{-1}T^{-x}}{\cancel{H}} = \frac{ML^{y}T^{-y}L^{-1}}{\cancel{H}}$$

$$LMT^{-1}T^{-x} = L^{-1+y}MT^{-7} \qquad \text{(Para que sea una igualdad)}$$

$$-1+y=1 \Rightarrow y=1+1 \Rightarrow y=2$$

$$-1-x=-y \Rightarrow -x=-y+1 \Rightarrow -x=-2+1 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow x=1$$

Luego:

$$x \cdot y = 1(2) \Rightarrow x \cdot y = [2] \Rightarrow \text{Resp. (d)}$$

11. La ecuación que se muestra nos da la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre:

$$h = \frac{1}{2}pg^{y}t^{z} \qquad \text{(Ec.1)}$$

h = altura [L]

t = tiempo [T]

p = peso (N = m · kg · s^{-2}) = [LMT^{-2}]

g = $9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \left[LT^{-2}\right]$

Determinar el valor de: $E = \sqrt[z]{x+y} \qquad \text{(Ec.2)}$

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** x **(d)** $\sqrt{x}$ **(e)** $\sqrt[2]{x}$

Pasamos a dimensiones en la ecuación 1:

$$L = LMT^{-2}\left(LT^{-2}\right)T^{z} \Rightarrow \frac{L}{LMT^{-2}} = L^{y}T^{-2y+z} \Rightarrow M^{-1}T^{2} = L^{y}T^{-2y+z} \Rightarrow L^{0}M^{-1}T^{2} = L^{y}T^{-2y+z}$$

$$y = 0 \quad ; \quad -2y + z = 2 \Rightarrow 0 + z = 2 \Rightarrow z = 2$$

Reemplazamos en la ecuación 2:

$$E = \sqrt[z]{x + y} = \sqrt[2]{x + 0} \Rightarrow E = \sqrt{x} \qquad \text{RESP.}(\text{d})$$

12. Dada la fórmula física: $K = dv^2$ onde:

d = densidad $[L^{-3}M]$

V = velocidad lineal $[LT^{-1}]$

Determinar la unidad en el SI de la magnitud K:

(a) Newton **(b)** Joule **(c)** Hertz **(d)** Pascal **(e)** Watts

$$K = L^{-3}M\left(LT^{-1}\right)^{2} = L^{-3}ML^{2}T^{-2} = \left[L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}\right]$$

$$\left[K\right] = \left[\text{Presión} = \frac{F}{A} = \frac{LMT^{-2}}{L^{2}} = L^{-1}MT^{-2}\right]$$

En unidades: $\left[\text{Pascal} = \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\right] \Rightarrow \text{RESP.}(\text{d})$

13. Hallar la ecuación dimensional de S en la siguiente fórmula:

$$\frac{\text{V}^2\text{A}}{T} = -Sa + Q$$

V= velocidad $[LT^{-1}]$

A = área $[L^2]$

T = tiempo [T]

a = aceleración $[LT^{-2}]$

(a) L^2T^2 **(b)** LT **(c)** L^3T **(d)** L^3T^{-1} **(e)** $L^{-3}T$

Como todos los términos deben tener las mismas dimensiones:

$$+Sa = \frac{V^2A}{T} \text{ (En dimensiones)}$$

$$+S\left[LT^{-2}\right] = \frac{\left(LT^{-1}\right)^2 L^2}{T} \Rightarrow +S = \frac{L^2T^{-2}L^2T^{-1}}{LT^{-2}} \Rightarrow +S = L^4 \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \Rightarrow +S = L^3T^{-1}$$

$$\left[S\right] = \left[L^3T^{-1}\right] \Rightarrow \text{RESP.}(\text{d})$$

14. En la fórmula física:

$$V = \sqrt{\frac{3W}{R}} \text{ hallar: } \left[R\right]$$

Si W se expresa en Joules $= \left[L^2MT^{-2}\right]$ y $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left[\mathrm{V}\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$

(a) M **(b)** ML **(c)** MLT **(d)** M^2 **(e)** ML^2

Reemplazando dimensiones tenemos:

$$\left(LT^{-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{L^2MT^{-2}}{R}}\right)^2$$

$$L^2T^{-2} = \frac{L^2MT^{-2}}{R}$$

$$R = \frac{\cancel{L^2}M\cancel{T^{-2}}}{\cancel{L^2}\cancel{T^{-2}}} \Rightarrow \left[R\right] = \left[M\right] \Rightarrow \text{RESP.}(\text{a})$$

15. Hallar las dimensiones de x en la siguiente ecuación homogénea:

$$\left(\frac{X \cdot V \cdot C}{10P}\right) = C_1^{\csc 30°}$$

P = potencia $[L^2MT^{-3}]$

V = volumen $[L^3]$

C, C1, a = aceleración $[LT^{-2}]$

(a) MT^{-1} **(b)** MT^{-2} **(c)** MT^{-3} **(d)** MT^{-4} **(e)** MT^{-5}

$$CSC\ 30° = \frac{1}{sen 30°} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$X = \frac{P\,C_1^{\cancel{2}}}{V\,\cancel{C}} \Rightarrow X = \frac{L^2MT^{-3}\cdot LT^{-2}}{L^3}$$

$$X = L^3MT^{-5}\cdot L^{-3}T^{-3}$$

$$\left[X\right] = \left[MT^{-5}\right] \Rightarrow \text{RESP.}(\text{e})$$

Los presentes ejercicios realizados a continuación fueron tomados de [8].

16. Considere los datos del recuadro y determine la variación de temperatura Δ°F del aluminio y la variación de temperatura Δ°K para el hierro.

Sustancia	Punto de fusión	Punto de ebullición
Aluminio	1220 °F	2400 °C
Hierro	1539 °C	2750 °C

a. ΔT(°F): aluminio (Al)

$$\Delta T = 2400°\text{C} - 1220°\text{F}$$

$$2400°\text{C} \rightarrow \text{Transformamos a °F}$$

$$F - 32 = \frac{9}{5}C \Rightarrow F = \frac{9}{5}(2400) + 32$$

$$F = 4352°\text{F}$$

$$\Delta T = (4352 - 1220)°\text{F}$$

$$\Delta T\,(F) = 3132°\text{F} \Rightarrow \text{RESP.}$$

b. Para el hierro: ΔT(K)

$$T(K) = °C + 273$$
$$\Delta T(K) = [(2750 + 273) - (1539 + 273)]$$
$$\Delta T(K) = 1211\text{K}$$

17. A nivel del mar, la presión atmosférica es de 1.013x10^5 Pa. En la ciudad de Morococha, situada a 4500 m. s. n. m., la presión atmosférica es 408 mm de Hg. ¿Cuál es la presión en atmósferas (atm) en esta ciudad?

$$Patm = 1\text{atm} = 1.013 \times 10^5\text{Pa} = 760\text{mm Hg}$$

Morococha:

$$Patm = 408 \text{ mm Hg} \times \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mm Hg}} \Rightarrow Patm = 0.5368 \text{ atm}$$

18. Una unidad de energía común es el ergio. Convertir 3.74x10^{-2} ergios a la unidad del SI.

$$E = 3.74 \times 10^{-2} \cancel{\text{Ergio}} \times \frac{\text{Julio}}{10^7 \cancel{\text{Ergio}}}$$
$$E = 3.74 \times 10^{-9} \text{ J}$$

19. Un manómetro indica que la presión es de 1520 mm de Hg ¿Cuál es el valor expresado en atm y pascal respectivamente?

$$P = 1520 \text{ mmHg} \times \frac{\text{atm}}{760 \text{ mmHg}} \Rightarrow P = 2 \text{atm}$$
$$P = 2 \text{atm} \times \frac{1.013 \times 10^5 \text{Pa}}{\text{atm}} \Rightarrow P = 2.056 \times 10^5 \text{Pa}$$

20. Calcule la masa en libras de una lámina de cobre de 100 cm de largo, 4.54 cm de ancho, 0.1 cm de espesor y densidad de 8.92 g/cm^3.

$$\rho(\text{densidad}) = 8.92\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho = \frac{\text{m}}{\text{v}} \Rightarrow v = (100 \times 4.54 \times 0.1)\ \text{cm}^3$$

$$v = 45.4\,\text{cm}^3$$

$$m = \rho \cdot v$$

$$m = 8.92\ \frac{\text{g}}{\cancel{\text{cm}^3}} \times 45.4\ \cancel{\text{cm}^3}$$

$$m = 404.968\ \cancel{\text{g}} \times \frac{\text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}}$$

$$m = 0.40497\ \cancel{\text{kg}} \times \frac{2.205\ \text{lb}}{\cancel{\text{kg}}}$$

$$m = 0.893\ \text{lb}$$

1.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Se presentan los siguientes ejercicios propuestos [9].

1. En la expresión siguiente, qué magnitud debe tener P

$$P = \frac{DFL}{m}$$

D: densidad F: fuerza

L: longitud m: masa

2. Qué magnitud tiene x en la siguiente ecuación.

$$x = \frac{\sqrt{2}\pi^n P \cdot A}{p \cdot V}$$

P: presión A: área

p: densidad m: masa

π = 3.1416 n = constante adimensional

3. La ecuación siguiente es dimensionalmente homogénea.

$$Q = \pi e^a \cdot mV^n$$

Q: calor m: masa

V: velocidad

Hallar: n

4. En la ecuación que es dimensionalmente homogénea:

$$D = \frac{\left(\sqrt{5}\log N\right)\left(MV^{2\,tg\,45}\right)}{N^2 y}$$

Hallar la ecuación dimensional de Y.

D: densidad M: masa

V: velocidad

5. La velocidad con que se propaga el sonido en un gas está definida por la siguiente relación:

$$V = \sqrt{\frac{rP}{\mathrm{p}}}$$

V: velocidad P: presión

p: densidad

¿Cuál es la ecuación dimensional de la relación de calores específicos r?

6. La rapidez con que fluye el calor por conducción entre dos capas paralelas se expresa por la relación.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A\left(T_2 - T_1\right)}{\left[\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2}\right]}$$

Q: calor t: tiempo

T: temperatura L: longitud

Hallar la ecuación dimensional de la conductividad térmica (K).

7. La variación de entropía (ΔS) es una magnitud física escalar y en un gas ideal dentro de un recipiente aislado cuando realiza una expansión desde un volumen inicial (V_0) , hasta un volumen final (V_f) se expresa por:

$$\Delta S = nR \ln\left(V_f / V_0\right)$$

Si n: número de moles y R: constante universal de los gases. Entonces, ¿cuáles serán las unidades de ΔS en el Sl?

8. Hallar la ecuación dimensional de la diferencia de potencial (V).

$$V = \frac{W}{q}$$

W: trabajo q: carga eléctrica

9. La unidad en el Sl de la capacidad eléctrica es el faradio (F); su equivalente con otras unidades del SI es:

$$C = \frac{Q}{V}$$

C: capacidad Q: carga eléctrica

V: diferencia de potencial

10. La capacidad eléctrica C de una esfera conductora se calcula de la expresión:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Siendo:

R: radio de la esfera conductora.

¿Cuál es la ecuación dimensional de la permitividad eléctrica del vacío ε_0?

11. Cuando un elemento metálico resistivo se calienta, sufre variación en su magnitud física llamada resistencia (cuya medida en el Sl es el ohmio (Ω)) la ecuación que relaciona dicho fenómeno es:

$$R_f = R_0\left(1 + \alpha\Delta t\right)$$

R: resistencia eléctrica   Δt: variación de temperatura

Hallar las dimensiones de α.

12. La ecuación de D'alembert de la iluminación (E) de una lámpara luminosa a cierta distancia (d) viene dada por la expresión:

$$E = \frac{I}{d^2 \cos\theta}$$

Si l = intensidad luminosa; entonces ¿cuál es la ecuación dimensional de E?

13. La fuerza magnética F sobre una carga móvil q, en presencia de un campo magnético B, se expresa por la ecuación:

$$F = qVB\,sen\,\theta$$

¿Cuál es la ecuación dimensional de la inducción magnética B?

14. La inducción magnética B producida por un conductor infinito con corriente eléctrica l a una distancia R; viene dada por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Hallar las unidades en el Sl de la permeabilidad magnética del vacío (μ_0).

15. La expresión siguiente es dimensionalmente correcta:

$$y = am + bn/m + c/n$$

Donde: y se mide en metros. Entonces cuál será la ecuación dimensional de abc.

16. Determinar la ecuación dimensional de K y A.

$$M = \frac{A\cos\alpha}{P\left(K^2 + b^2\right)}$$

Si: P: presión b: longitud M: masa

17. En la siguiente ecuación dimensional

$$V = 3a/t^3 + (b+h)\frac{c}{d}$$

Si: V: volumen t: tiempo h: altura

Entonces: ¿cuál es la ecuación dimensional de bc/ad?

18. Halle (C) en la siguiente ecuación; si es dimensionalmente homogénea.

$$C = at + \left(\frac{b}{v} + \frac{R}{c}\right)^{1/2}$$

Además: V: viscosidad R: radio de curvatura t: tiempo

19. Hallar la ecuación dimensional de xb^2/a si se sabe:

$$x = A\ln(bt)\,tg\left(\theta + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$$

Si: A: longitud t: tiempo

20. La expresión siguiente:

$$\sqrt{A+B^n} + A^{\cos\propto} = B^{2\,sen\propto}$$

Es dimensionalmente homogénea. Entonces, ¿cuál es el valor de n?

21. Si la expresión siguiente es dimensionalmente correcta; halle la ecuación dimensional de y

$$xy = \frac{\sqrt{mP + Wx}}{V}$$

Además: m: masa P: potencia

W: trabajo V: velocidad

22. A partir de la expresión mostrada y si es dimensionalmente correcta; diga cuales son las dimensiones de S y Q respectivamente.

$$\sqrt{A+\sqrt{S\left(1-e_1/e_2\right)}} = Q$$

Si: e_1, e_2: espacios A: área

23. La ecuación:

$$P = K_1V^2 + 0.2mgV^n + K_3$$

Es dimensionalmente correcta; además:

P: potencia V: velocidad m: masa

g: aceleración de gravedad

Hallar: $\left[\sqrt[n]{K_1 K_3}\right]$

24. Si la ecuación siguiente es dimensionalmente correcta:

$$\frac{Bx^2}{2\,sen\,(\omega B)} = am^2 Pbc\, e^{bcx}$$

Donde: a: aceleración m: masa P: potencia w: velocidad angular

¿Cuál será la magnitud de x?

25. Si la expresión siguiente es dimensionalmente homogénea.

$$AE = V\left(\log K_1 + e^{\frac{Ex}{t}}\right)$$

Además: A: área V: velocidad t: tiempo

Hallar la ecuación dimensional de x.

26. La expresión:

$$A = \frac{\ln(3K)B^{x+y}\ CD}{E^2}$$

Es dimensionalmente correcta; entonces x+y+z es:

A: fuerza C: profundidad E: tiempo

B: masa D: densidad

27. Si la expresión mostrada es dimensionalmente correcta:

$$a^n x + a^{n-1}x^2 + a^{n-2}x^3 + \ \ldots\ + ax^n = k$$

Si, además: a: aceleración k: constante física

Hallar las dimensiones de x.

28. En el movimiento oscilatorio amortiguado de un bloque; la ecuación que define su movimiento es:

$$m\alpha + \lambda v + kx = 0$$

Si, además: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y $2\gamma = \lambda/m$

m: masa a: aceleración

V: velocidad x: posición

$\boldsymbol{\omega}_0$: frecuencia angular

La ecuación dimensional de $\boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\omega}_0$ es:

29. En la ecuación que es dimensionalmente correcta:

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{A + C^2 sen\alpha}{\text{V}}$$

V: es velocidad; entonces la ecuación dimensional de XC será:

30. En el movimiento armónico simple en la superposición de dos movimientos, existe la siguiente ecuación.

$$V = \omega\left(A\cos\omega t + B sen\omega t\right)$$

Si B tiene unidades de longitud, entonces V es una magnitud física llamada:

31. La relación matemática que indica la presencia de los campos magnético y eléctrico actuando sobre una carga en movimiento es:

$$F = q_0\, V \times B + E \times q \quad (\text{Relación de Lorentz})$$

Según esto:

Hallar la ecuación dimensional de B:

F: fuerza

V: velocidad

q: carga eléctrica

E: campo eléctrico

32. En un circuito constituido por una resistencia eléctrica (R) y un condensador de capacidad eléctrica (C), existe una ecuación que relaciona el tiempo de carga (t) del condensador:

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Si ε: se mide en voltios:

Hallar la ecuación dimensional de R.

33. En la mecánica cuántica (efecto Compton), se usa la ecuación.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}} - 1\right)$$

Donde:

λ, λ_1 : longitud de onda

V: velocidad

Hallar la ecuación dimensional de la constante de Plank (h) .

34. La inducción magnética creada por una carga eléctrica (q) en movimiento cuando tiene velocidad (V), a una distancia (r) se expresa como:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \times q^a \times V^b \times r^c \times sen\theta$$

Luego: a+b+c será:

35. Convertir

a. $1.5X10^{-5}$	año luz	a	[µm, m , pies, yarda, milla]
b. 12×10^{12}	g (gramos)	a	[kg, t (tonelada métrica), lb, UTM, Tt.]
c. $2x\ 10^5$ h 3×10^9 min 4×10^{18} s		a	[siglo, día, h (hora), s]

d. $7x\ 10^{15}$ pA (pico amperio)	a	[nA, fA, PA, A, mA]
e. 700 K	a	[°C °F]
f. 3.2×10^{-1} rad	a	[grados (°)]
g. $5.4X10^{-10}$ km	a	[I (litro), barril, m^3, cm^3, galones]
h. 1.8×10^4 mm	a	[mm^2, acre, m^2, hectáreas]
i. 17.5 t/mm^3 ; t(tonelada)	a	[g/cm^3, lb/pul^3, kg/m^3]
j. $10.8.5\ \ x\ 10^6$ lb-pie	a	[kgf m, dina/cm, J]
k. $4.7x10^5$ HP	a	[cv, kgf m/h, W, GW]
l. $2.2x10^{15}$ A/mm	a	[Milla/s, pie/s, km/h, m/s]
m. 3.6×10^{-3} pul/h^2	a	[$yarda/s^2$, milla/min m/s^2]
n. 9.1×10^5 atm	a	[mm H20, Kgf/cm^2 lbF /pul^2, Pa, cmHg]
o. 55.5×10^4 RPM	a	[rad/h, rad/min, rad/s]
p. 5×10^{28} (Angstrom)	a	MILLAS
q. 45×10^{15} pul	a	Tm
r. 8×10^{18} yardas	a	Año lux. Si año lux = 9.461×10^{12} km
s. 500 pul^2	a	Pm^2
t. 3500 barriles	a	cm^3 Si a barril = 0.159 m^3
u. 2×10^{-6} µg	a	t
v. 3.5 kgf	a	dinas

36. Si la velocidad de un auto que se mueve con M.R.U es de 100 km/h, qué espacio (x) en (m) recorrerá en 5 h 35 min 45 seg (5 h 35’45”). Si: V = x/t.

37. Una milla náutica equivale a 6076 ft, y un nudo (Kn) es una unidad de velocidad que es igual a 1 milla náutica/h. Un barco lleva una velocidad de 12 Kn. ¿Cuál es su velocidad en millas por horas? ¿En pies/s? ¿En m/s?

38. Cuál es la densidad (ρ) de un cuerpo (cilindro hueco) cuyo diámetro exterior (D= 5.0 x 10^{-5} milla), el diámetro interno (d=4.0 x10^{-5} milla) y una altura (h = 5 pul), si la masa (m= 8 lb). Determine ρ=m/v en el Sl. $V = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d\right)^2 h$

39. Determinar la potencia (P) en el SI, necesaria para calentar agua de 18 °C a 40 °C, si el volumen es de 25 l, en un tiempo = 0.017 h, si Cagua = 1 cal/g °C, si 1 cal = 4.186 J y Q=m.c. (Tf-To) y P = Q/t

40. Demostrar que 1 lbf /pie corresponde a 0.1922 pul de agua.

41. Demostrar que 406.8 pul de agua corresponde a 1.013 x 10^6 dina/cm2.

42. Determinar la ecuación dimensional para la conductancia eléctrica (CE =1/R), R=v/i, V= T (trabajo)/q(carga).

43. Determinar la ecuación dimensional para el calor específico (c= Q(calor)/m (Δt)) m = masa; Δt=Tf-T0.

44. Sabiendo que 1 rev=360°=2 πrad. Si la velocidad angular sufre una variación (ΔW) de 1000 RPM (rev/min) en 0.5 s (t) en un motor que tiene un Radio (R) de 100 cm. Determine la aceleración tangencial (at) que experimenta el motor debido a esta variación, conociendo que:

$$\alpha = \left(\text{aceleración angular} \Rightarrow \text{rad/s}\right) \qquad \alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t}; dt = \alpha \cdot R$$

45. Una partícula tiene una masa (m) de 1200 UTM y parte desde el reposo (V_0=0), acelera uniformemente hasta alcanzar una velocidad de 120 milla/h [velocidad final en un tiempo (t) de 1.5 x 10^{-3} min]. Determine la fuerza (F) aplicada a la partícula en el SI, sabiendo que:

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a} \qquad \mathrm{a} = \left(\mathrm{V} - \mathrm{V_0}\right)/\mathrm{t}$$

46. Un cuerpo es lanzado en un precipicio hacia abajo con una velocidad inicial (V_0 = 30 pie/min) ¿Qué velocidad (V) en el SI alcanzará el mismo después de 5,4x10^{-3} h (t), sabiendo que:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V_0} + \mathrm{gt} \quad \text{y que} \quad g = 980\,\mathrm{cm/s}$$

47. Un cuerpo animado por M. R. U. V. parte con una velocidad inicial (V_0) de $1.8x10^{-10}$ año luz/h y le imparten una aceleración (a) de 2.5×10^5 yarda / min^2 durante un tiempo (t) de 4.2×10^{-4} h. Determine en el SI el espacio recorrido (Ar) y la velocidad final (rapidez) (V) sabiendo que para este movimiento:

$$Ar = V_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad V^2 = V_0^2 + 2aAr$$

48. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial (Vo) de 6.5 x 10 milla/h y su dirección forma un ángulo α sobre la horizontal de (π / 4 rad).

Determine en el SI:

a) La altura máxima alcanzada por el proyectil (h máx.)

b) El tiempo transcurrido para que el proyectil regrese al nivel de lanzamiento, o tiempo de vuelo (tv)

c) El alcance máximo del proyectil (A).

Sabiendo que:

$$g = 4.17312 \times 10^8 \text{pie/h}$$
$$tv = (2V_0 \, sen\alpha)/g$$
$$A = (V_0 \, sen2\alpha)/g$$

49. Una partícula que se mueve por una trayectoria circular de 1.6×10^{-2} mm (R) gira un ángulo (Δθ) de 125° cada 7×10^{-3} h (At)

Determinar en el SI.

a) La velocidad angular de la partícula (W)

b) La rapidez de la partícula (V)

c) El período (T)

d) La frecuencia (f)

e) El módulo de la aceleración centrípeta (ac)

Sabiendo que:

$$W = \Delta\theta / At \qquad V = W \cdot R$$

$$T = (2\pi)/W \qquad f = 1/T$$

$$AC = V^2 / R$$

50. Un cuerpo que está girando por una trayectoria circular de 7.5 x 10^{-4} km. De radio (R) demora 8.3 x 10^{-4} h (Δt) en girar un ángulo de (10π) /3 rad (Δθ) y alcanza una velocidad angular de 50 RPM (W).

Determinar en el SI:

a) La velocidad angular media (Wm)

b) La velocidad angular inicial (Wo)

c) La aceleración angular (α)

d) La rapidez inicial (Vo)

e) La rapidez final (V)

f) La distancia recorrida (d)

g) El módulo de la aceleración total final (a)

Sabiendo que :

$$Wm = \Delta\theta / \Delta t \qquad Wm = (W_0 + W)/2$$

$$\alpha = (W - W_0)/\Delta t \qquad V_0 = W_0 \cdot R$$

$$V = W \cdot R \qquad d = \Delta\theta \cdot R$$

51. Un hombre que pesa 5.7 x 10^3 poundal (F) sube corriendo por una escalera inclinada 60° (θ) con la horizontal y de 314 pul de longitud (L) en 0.13 min (t).

Determinar la potencia (Pot) en el SI, sabiendo que:

$$Pot = TR/t \qquad T_R = F \cdot H$$

$$H = L\,sen\,\theta \qquad T_R = \text{Trabajo}$$

52. Una pelota de béisbol que tiene una masa de 4.5 onza (m) tiene una velocidad de $x10^{11}$ $\left[\mathring{A}/s(V)\right]$. ¿Cuál es su energía cinética (Ec)?, sabiendo que:

$\mathring{A}$ = Angstrom $=10^{-10}$ m.

$$Ec = \frac{1}{2} m V^2$$

53. Un pequeño cohete quema 6 mg (Δm) de combustible en un minuto (Δt). La velocidad de salida en el escape es de 2.8 x 10^8 pul / h (V). ¿Cuál es el empuje medio (F) ejercido sobre el cohete en el SI?, sabiendo que:

$$F = (\Delta m / \Delta t) V$$

54. Por un tubo de 0.465 pul^2 de área (A) fluye agua con una velocidad (V) de 984 pie/min.

Determine el caudal o flujo de agua (Q) en el SI, sabiendo que:

$$Q = VA$$

CAPÍTULO III. GRÁFICAS Y FUNCIONES

3.1. GRÁFICAS Y FUNCIONES

3.1.1. El papel de las gráficas en física

Usted va a encontrar que frecuentemente, en Física, en la ingeniería y en otras ramas técnico-científicas del conocimiento, el uso de gráficas y funciones es de gran utilidad para los siguientes objetivos:

a. Ilustrar la relación entre magnitudes (variables) de un fenómeno medidas en un proceso experimental, describiendo la naturaleza y el comportamiento del evento científico.

b. Determinar, basándose en las características de la gráfica o de la relación matemática, el valor de constantes físicas o científicas.

c. Difundir a otras personas la información contenida en la gráfica, e interpretado a través de las relaciones matemáticas (ecuación).

3.1.2. Función

Si X y Y representan números naturales, Y es una función de X, cuando Y quede determinada unívocamente por el valor de X, esto significa:

$$y = f(x)$$

Y es considerada la variable dependiente y X la variable independiente.

Ejemplo 3.1

A. $y = 3x$

Se dice que Y es función de X, porque por cada número natural que remplace a X, solo puede haber un número natural que sea valor de Y.

B. $y = -2 + 3x - 2x^2$

También Y es una función solo de X.

C. $y = 2x + 3t - 4z$

En este ejemplo, Y, X, t, Z son variables.

$y \neq f(x)$ si no:

$y = f(x, t, z)$

3.1.3. Variables

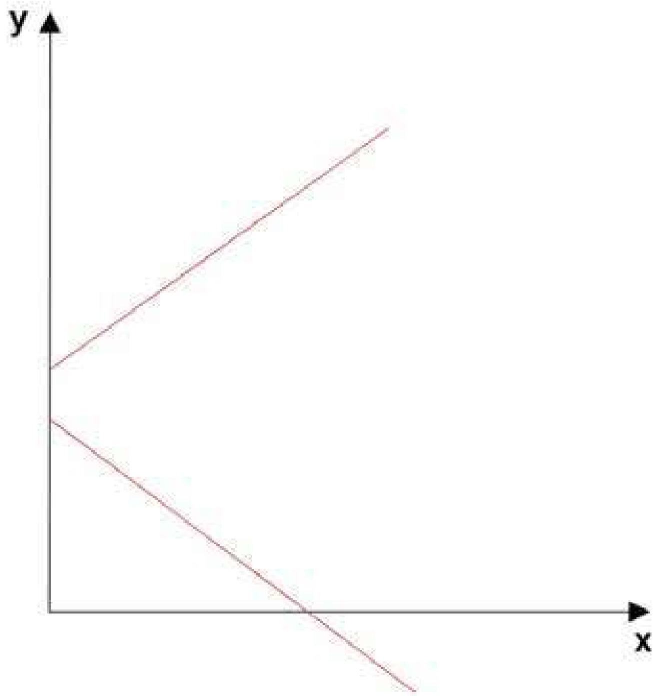
Si Y es función de X, se llama, a la magnitud X, «variable independiente» y a Y, «variable dependiente». En la realidad, en vez de X y Y, se hablará de magnitudes reales como (longitud, masa, voltaje, etc.).

3.1.4. Función lineal

Cuando al graficar Y= f(x), la gráfica nos diera una línea recta como la de la figura 3.1, entonces sabemos con seguridad que la función es lineal. La ecuación que interpreta a la función graficada será:

$$y = b + mx \qquad (2.1)$$

Figura 3.1 Curva de decrecimiento radioactivo



A esta se la conoce como ecuación de la función lineal en forma de pendiente y ordenada.

Para definir la «erelación especifica», es necesario determinar las constantes b y m, y reemplazar sus valores en la ecuación (3.3).

El valor de b se puede obtener a partir de la gráfica, y es el que le corresponde a Y cuando X = 0

$$y_0 = b$$

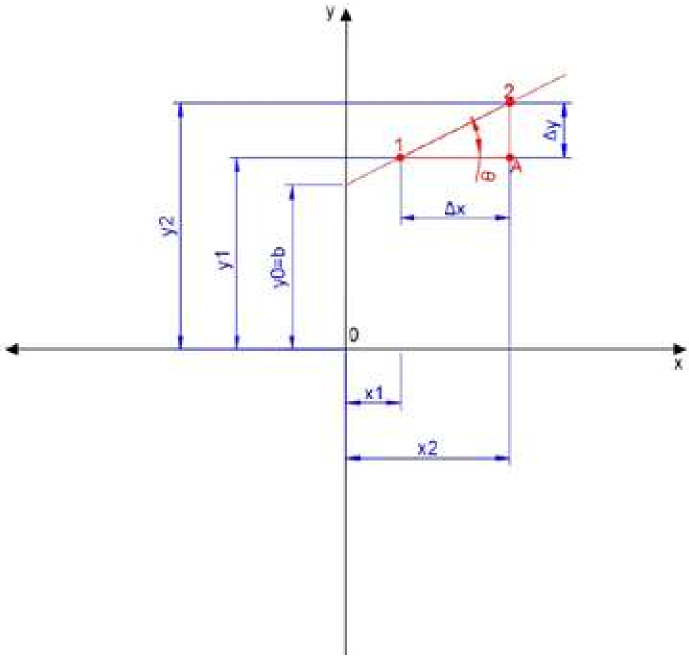
Ahora, despejando m de (3.1), tendríamos:

$$m = \frac{y - b}{x}$$

Como b = Y_0 cuando $X_0 = 0$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 3.2 Cálculo de la pendiente



Observamos que m corresponde geométricamente a la tangente del ángulo θ del triángulo rectángulo 1, 2 y A; es decir:

$$\mathrm{Tan}\,\theta = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

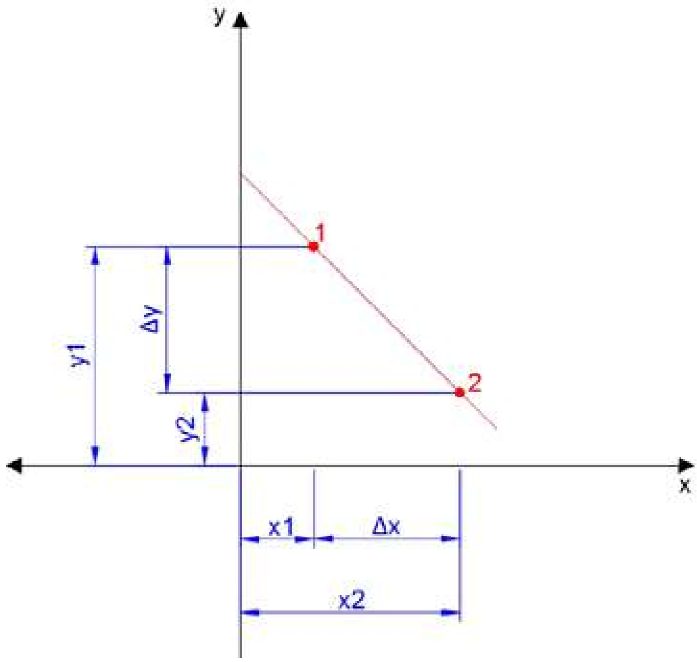
A esta constante m se la llama pendiente de la recta en la figura 3.2. y su valor siempre será positivo (+).

Si la recta es como la de la figura 3.3., el valor de la pendiente siempre será negativo (–).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{como} \quad y_2 < y_1 \quad y_2 - y_1 \rightarrow (-)$$

$$m = \frac{(-)}{(+)} = (-) \qquad x_2 < x_1 \quad x_2 - x_1 \rightarrow (+)$$

Figura 3.3 Pendiente negativa



3.1.5. Representación de funciones

Una función, sea lineal o de otra forma, puede ser representada por:

1. Una tabla de pares de números (tabla de datos)
2. Una gráfica
3. Una ecuación
4. Una proposición verbal

En un laboratorio, al medir dos magnitudes que se relacionan en un fenómeno físico, se obtuvieron los siguientes resultados; los mismos que, al representarlos en una tabla de pares de números, manifiestan la primera forma de representar a una función:

3.1.5.1. Tabla de datos

X	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4
Y	4	7	10	13	1	-2	-5	-8

La tabla de datos representa la función Y= F(x), pero no siempre es la mejor forma, ya que, por lo general, solo con la tabla de pares de valores, no podemos determinar la función o relación especifica que existe entre las dos variables. Por lo tanto, a partir de la tabla de datos, procedemos a realizar la gráfica, que es la segunda forma de representar una función:

3.1.5.2. Gráfica

Para hacer la gráfica, debemos elegir la variable independiente X (en forma general) y la Y sería la dependiente (en forma general). A la variable independiente, la graficamos en el eje de las horizontales (o eje de abscisas) y a la dependiente, en el eje de las verticales u ordenadas.

Además, dependiendo de los valores mínimo y máximo de X y de Y vistos en la tabla de datos. Debemos elegir una escala para representar los mismos. Esta escala no necesariamente debe ser la misma para X e Y, pudiendo ser iguales también. Escalas adecuadas pueden ser:

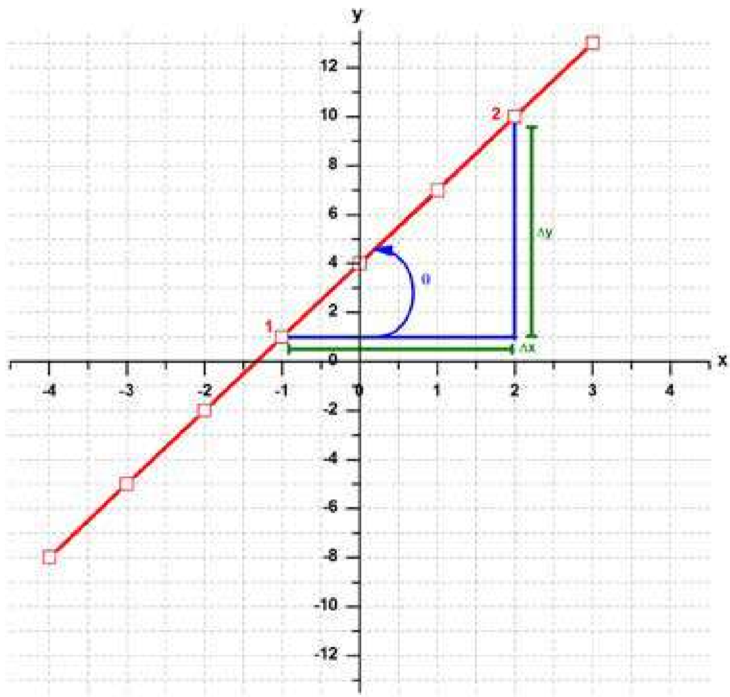
$$\left\{\begin{matrix} 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 1, 10, 100, 1000, \ldots\ldots \\ 0.2, 0.02, 0.002, \ldots, 2, 20, 200, 2000, \ldots\ldots \\ 0.5, 0.05, 0.005, \ldots, 5, 50, 500, 5000, \ldots\ldots \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Unidades de las} \\ \text{magnitudes a representar} \\ 1 \ = \ cm \end{matrix}$$

Grafiquemos la función de este ejemplo:

ESCALAS: X: 1 cm = 1 unidad de X

Y: 1 cm = 2 unidades de Y

Figura 3.4 Función lineal



Como la gráfica es una línea recta inclinada, nos indica que la función entre Y y X es «lineal». Sin embargo, aunque la gráfica es una buena representación de la función, no es la óptima, ya que, si quisiéramos hallar cualquier valor de Y, dado cualquier valor de X, no siempre es fácil determinar tal valor. En el ejemplo, si quisiéramos hallar el valor de Y para X= 20, habría que alargar la gráfica para hacer la extrapolación correspondiente, y esto no siempre es factible. Por lo tanto, debemos encontrar la forma óptima de representar la función y esta es la ecuación.

3.1.5.3. La ecuación

Como la gráfica es lineal, la ecuación general que interpreta a esta gráfica sería:

$$y = b + mx \quad (A)$$

b = el valor de b es el valor que toma cuando

$$x = 0 \quad : \quad y_0 = b = 4$$

m = es la pendiente que se determina eligiendo dos puntos cualesquiera 1 y 2 en la gráfica:

$$y = 4 + 3(-50) = -146$$

Reemplazando en la ecuación general (A) tenemos:

$$y = 4 + 3x$$

La ecuación es la mejor forma de representar a una función, ya que, a través de esta, podemos determinar en forma inmediata y exacta el valor correspondiente de Y para cualquier valor de X. Por ejemplo, para este caso, ¿cuál será el valor de Y para X=20?

$$y = 4 + 3(20) = 64$$

Y el valor de Y para X = -50

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 1}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

Al determinar la ecuación, quedará plenamente definida la función y= f(x) y la cuarta forma de representar una función, que es la proposición verbal, ya no hace falta formularla. Sin embargo, será opcional con la finalidad de enfatizar la función. En este caso, una proposición verbal podría ser: «Y es una función lineal de X en forma creciente».

3.1.6. Función lineal de proporción directa

Cuando la gráfica de una función es una línea recta inclinada que pasa por el origen del sistema de coordenadas, se sabe que la función lineal varía de una manera específica bien definida, que es: si la variable independiente X se multiplica o se divide por un determinado factor, la variable dependiente Y queda también multiplicada o dividida por el mismo factor. Lo que significa que:

$$y \;\alpha\; x \qquad \alpha\left(\text{directamente proporcional A}\right)$$
$$y = K x$$
$$\frac{y}{x} = K \qquad K\left(\text{constante de proporcionalidad}\right)$$
$$K = m = \text{Pendiente de la línea recta}$$

En este caso, hallar la constante K o la pendiente significaría dividir cualquier valor de Y para su correspondiente valor de X sin seleccionar dos puntos, ya que un punto seleccionado intrínsecamente sería el origen (0,0).

$$K = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{y_i}{x_i}$$

Ejemplo 1.2 Función lineal de proporción directa

Dados los siguientes resultados represente la función:

Tabla de datos

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	6	4	2	0	-2	-4	-6
Y/X	-2	-2	-2		-2	-2	-2

Solución

Al analizar la tabla de pares de valores, notamos la razón d $\frac{y}{x} = K(-2)$.

Entonces podríamos, con seguridad y directamente, hallar la ecuación que sería:

$$y = -2x$$

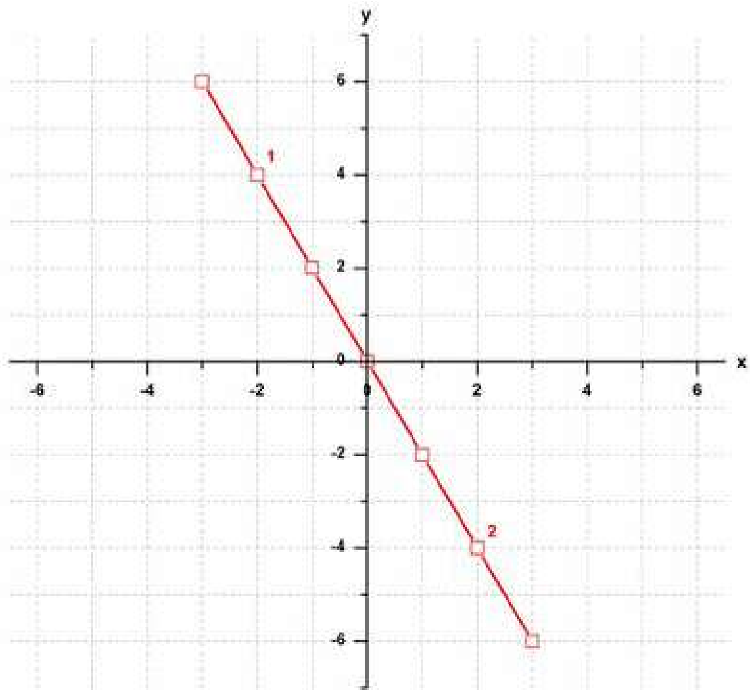
Sin embargo, si usted prefiere hallar la ecuación, representando antes la gráfica, puede hacerlo:

Representación gráfica

Escalas: X: 1 cm = 1 unidad

Y: 1 cm = 1 unidad

Figura 3.5 Función lineal de proporción directa decreciente



Como la gráfica es una recta que pasa por el origen, la función es lineal, de la forma general:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-(4)}{2-(-2)}=\frac{-8}{4}=-2$$

Luego, la ecuación será:

$$y=-2x$$

Si se quiere enfatizar la función a través de una proposición verbal, la misma podría ser:

«Y es directamente proporcional a X de manera decreciente», o

«Y es una función lineal a X que pasa por el origen de manera decreciente».

3.1.7. Aplicaciones de funciones lineales

Aunque estas funciones son las más sencillas, en la práctica, hallamos muchas aplicaciones para ellas. Por ejemplo, funciones lineales de proporción directa como:

a. $m = K\,V$

En donde:

m = masa de sustancia (kg)

V = volumen de esta sustancia (m^3)

K = ρ = densidad absoluta de la sustancia

b. $E = \gamma liq \cdot V$

En donde:

E = empuje de Arquímedes (N)

V = volumen introducido en el líquido (m^3)

γliq = peso específico del líquido (N/m^3)

V = volumen cuerpo introducido= volumen líquido desalojado (m^3)

c. $F\varepsilon = q\mathrm{E}$

En donde:

Fε = fuerza eléctrica de Coulomb (N)

q = carga eléctrica de prueba (C)

E = campo eléctrico (N/C)

d. $Vab = R \cdot i$

En donde:

Vab = ddp o voltaje entre a y b (V)

R = resistencia eléctrica (Ω)

i = intensidad de corriente (A)

e. $Q = C \cdot Vab$

En donde:

Q = carga eléctrica (C)

Vab = ddp o voltaje (V)

C = capacidad eléctrica (F)

3.1.8. Funciones lineales de la forma $y = b + mx$

a. $°F = 32 + \frac{9}{5}°C$

En donde:

°F = (temperatura en grados Fahrenheit)

°C = (temperatura en grados Celsius)

b. $°K = 273 + °C$

En donde:

°K = (temperatura en Kelvin)

°C = (temperatura en grados Celsius)

c. $L_F = L_0 + K\,\Delta x$

En donde:

$\boldsymbol{L_F}$ = longitud final

$\boldsymbol{L_0}$ = longitud inicial

$\boldsymbol{K}$ = constante elástica de recuperación

$\boldsymbol{\Delta x}$ = deformación o alargamiento

d. $E = Vab + r \cdot i$

En donde:

$\boldsymbol{E}$ = fuerza electromotriz de una fuente de FEM

$\boldsymbol{Vab}$ = ddp o voltaje de la fuente de FEM

$\boldsymbol{r}$ = resistencia interna de la fuente de FEM

$\boldsymbol{i}$ = intensidad de corriente que pasa por la fuente de FEM

3.1.9. Funciones potenciales

Muchas de las relaciones entre las magnitudes que intervienen en un fenómeno físico o evento científico pueden ser expresadas como «FUNCIONES POTENCIALES». La función potencial de proporción directa se define por la ecuación: $y \alpha x^n$ o $y = k x^n$ en donde:

Y y X son las magnitudes.

K y n son constantes que pueden ser números reales cualesquiera, positivos o negativos.

Se la designa como «función potencial» en vista de que la variable independiente X está elevada a una potencia n.

También existen muchísimas aplicaciones de estas funciones como, por ejemplo:

a. $C = \pi \cdot D$

En donde:

C = perímetro de una circunferencia o longitud de esta

D = diámetro de la circunferencia

$\boldsymbol{\pi}$ = (3.1416)

b. $d = 4.9t^2$

En donde:

d = espacio recorrido en el M.R.UV.A cuando υ_0=0 m/s

4.9 = constante (1/2 g)

g = gravedad (aceleración) = 9.8 m/s^2

t = tiempo transcurrido

c. $\rho = 10^5 V^{-1}$

En donde:

$\boldsymbol{\rho}$ = presión de un gas ideal

$\boldsymbol{V}$ = volumen del gas ideal

d. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

En donde:

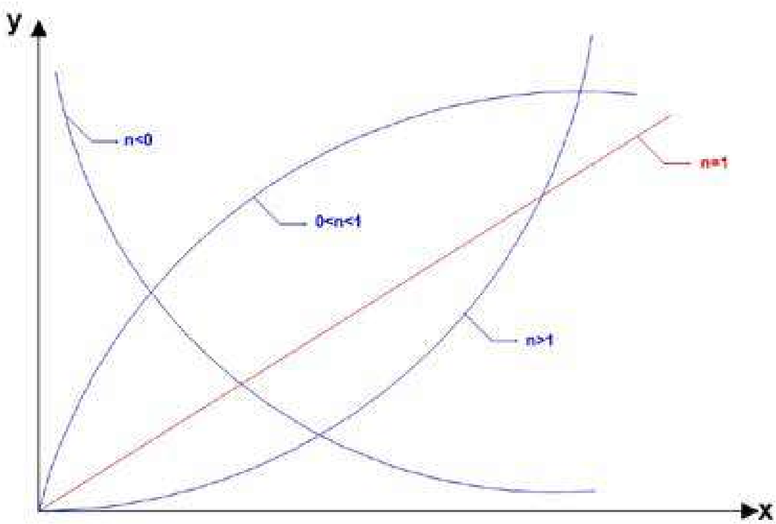
$\boldsymbol{V}$ = volumen de una esfera

$\boldsymbol{R}$ = radio de la esfera

3.1.10. Gráficas de funciones potenciales de proporción directa

Las funciones potenciales de la forma general $y = K x^n$ pueden tener cualquiera de las siguientes formas gráficas:

Figura 3.6 Gráfica función potencial: $y = K x^n$



Luego, si la gráfica de $y = f\,(x)$ tiene cualquiera de las curvas indicadas, podemos lanzar como hipótesis que es una función potencial de proporción directa de la forma:

$$y = K\,x^{n} \qquad (3.2)$$

En otros términos, estamos manifestando que:

$$y\,\alpha\,x^{n} \;\text{ o que }\; \frac{y}{x^{n}} = K$$

Para demostrar la hipótesis, podríamos hacerlo intentando encontrar gráficamente la relación , es decir esta gráfica será una línea recta inclinada que pase por el origen.

3.1.11. Linealización por tanteos

Una forma de demostrar que $y\,\alpha\,x^{n}$ es dando valores a la potencia n y graficando $y = f\,(x^{n})$ hasta que esta sea una línea recta, si es que existe. Para tener una idea de qué valores dar a n, tendremos la forma de la gráfica y daremos los valores que aquí se sugieren. Para determinar la constante K, se lo hará determinando la pendiente [10].

$$m = K = \frac{y_i}{x_i^{n}}$$

Ejemplo 3.3

Al medir los diámetros (D) y las longitudes de unos círculos, se obtuvieron los siguientes resultados:

D (Cm)	0	5.10	7.90	10.20	12.10
C(Cm)	0	16.45	25.20	31.95	38.20
Y/X	-2	-2	-2		-2

Determinar:

a. La ecuación empírica específica que relaciona estas dos magnitudes en el SI de unidades.

b. La constante de proporcionalidad, ¿qué significado tiene?

c. ¿Qué ley general ha comprobado en este caso?

d. Al determinar el significado de la constante K por un método experimental, ¿cuál es el error porcentual cometido?

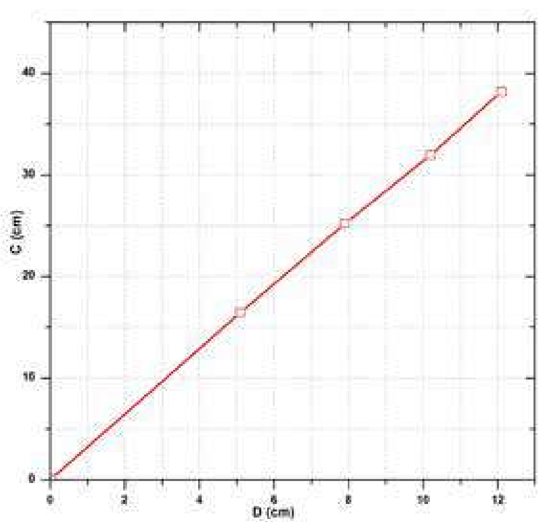
Solución

a. Para encontrar la ecuación, hacemos la gráfica, eligiendo como variable independiente a D y como dependiente a C.

   Las escalas son: D: 1 cm = 1cm   C: 1 cm = 5cm

La llamamos ecuación empírica porque trabajaremos con datos experimentales o empíricos.

Figura 3.7 Función lineal de proporción directa creciente



Como la curva más próxima que pasa por el medio de los puntos experimentales es una línea recta que pasa por el origen, la relación es lineal de proporción directa, en donde, en forma general, y x^n n = 1 y = kx C = KD (A)

$$K = \frac{y_1}{x_1} \cong \quad \Rightarrow \quad \cong 3.17 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad \text{en}\left(\text{A}\right)$$

C= 3.17 D en donde D(cm) C(cm)

Para cambiarla al SI, solo trabajamos con la constante K.

$$K = 3.17 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \times \frac{1\text{m}}{100\text{cm}} \times \frac{100\text{cm}}{1\text{m}} = 3.17 \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

$$\text{Luego: } \mathrm{C} = 3.17\,\mathrm{D} \Rightarrow \begin{array}{c} D(\text{m}) \\ \Downarrow \\ C(\text{m}) \end{array}$$

b. En este caso, la constante K= 3.17, que es adimensional o no tiene unidades, significaría en forma general el número π.

$$\pi \cong 3.1416\,\text{rad} \qquad\qquad rad = \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = \frac{\text{km}}{\text{km}} = etc$$

c. Con esta relación, la ley general que hemos demostrado es:

$$C = \pi \cdot D$$

En donde:

C = longitud de la circunferencia o perímetro

D = diámetro de la circunferencia

d. Para calcular el error porcentual cometido al medir π experimentalmente, tenemos las siguientes relaciones:

(VT) Valor más probable o teórico = π

(VE) Valor experimental = 3.17 = K

$$Ea = \pm\left|VT - VE\right| \qquad (3.3)$$

La diferencia o valor absoluto entre el valor más probable (VT) y el valor experimental (VE) se llama error absoluto (Ea) o desviación, que es el error total cometido al medir dicha magnitud específica.

La relación o cociente entre el error absoluto (Ea) y el valor más probable (VT) se llama error relativo ER.

$$ER = \frac{Ea}{\mathrm{VT}} \qquad (2.4)$$

El error relativo es el error que se comete al medir una unidad de la magnitud medida.

Al error relativo multiplicado por cien lo llamamos error porcentual (EP) y será el error que se comete al medir cien unidades de la magnitud medida y se expresa en porcentaje (%).

$$EP = ER \times 100 \frac{\pm\left| VT - VE \right|}{VT} \times 100\,(\%) \qquad (2.5)$$

Con la fórmula (1.7), calculamos el error porcentual:

$$EP = \pm\frac{\left|\pi - 3.17\right|}{\pi} \times 100(\%)$$
$$EP = \pm 0.96\%$$

Ejemplo 3.4

El peso W y los lados ft de unos cuadrados de madera terciada, se muestran en la tabla siguiente:

ft (pie)	0	1.0	1.5	2.0	2.5
W(lbf)	0	0.50	1.1	2.0	3.2

DETERMINAR:

a. La ecuación empírica que relaciona a estas dos magnitudes en el SI.

b. Partiendo de la relación anterior y si el espesor de la madera fue de: e= 20 mm, encuentre una relación general para este caso.

c. Determine el valor experimental de la densidad (ρ madera)

d. Si el valor para la densidad dado por los fabricantes es de: ρ madera= 0.117g/cm^3; ¿cuál ha sido el error porcentual cometido en este experimento?

Solución

a. Iniciamos graficando, para lo cual seleccionamos a W como la variable dependiente y a ρ, la independiente.

ESCALAS: ft: 1 cm = 0.5 pie ; W: 1 cm = 0.5 lbf

Figura 3.8 Peso en función del lado l

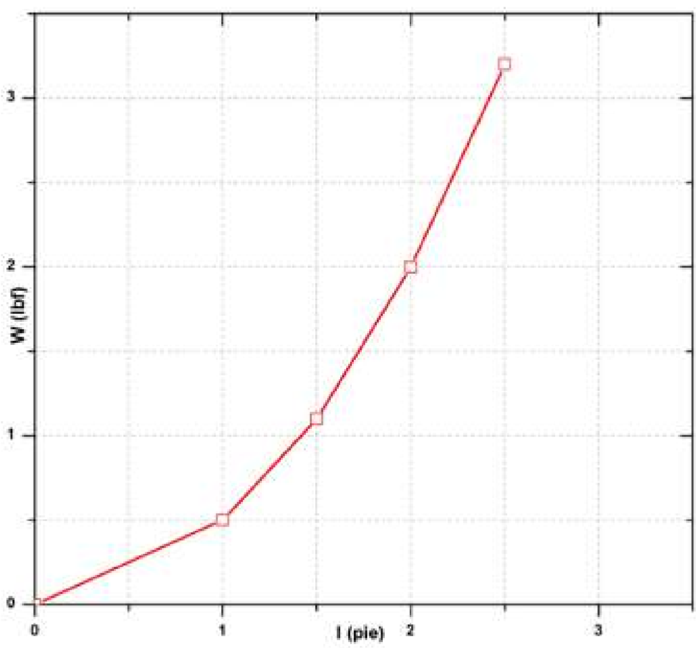
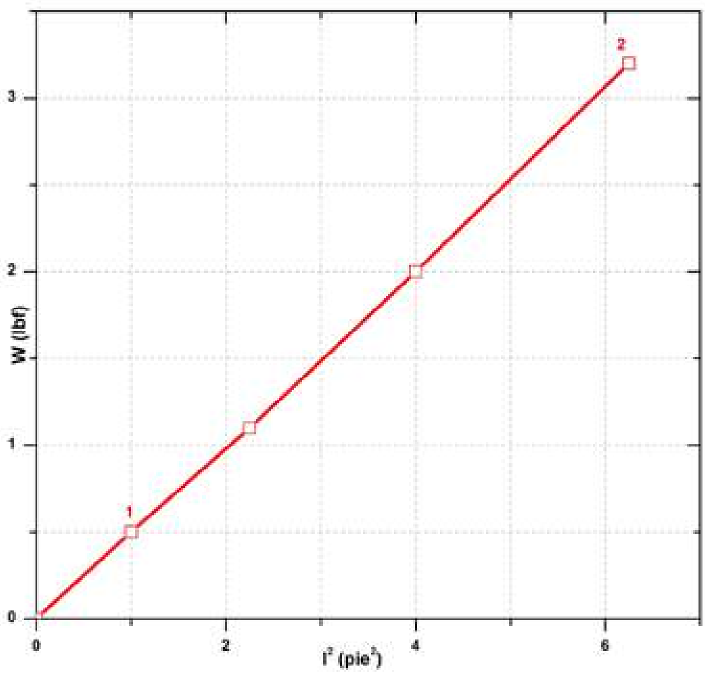


Figura 3.9 Peso en función del cuadrado de l



Como la gráfica de la figura 3.8 es una curva similar a las de la figura 3.6, lanzamos la hipótesis de que la función puede ser potencial de la forma: $W = k\, l^n$

Para comprobar la hipótesis, buscamos la relación $W \alpha\, l^n$ dando valores a n. La forma de la gráfica nos sugiere que n>1; entonces, damos el valor de n = 2 como exponente próximo más simple de l y preparamos la siguiente tabla de datos:

ft^2(pie²)	0	1.00	2.25	4.00	6.25
W(lbf)	0	0.50	1.10	2.00	3.20

La gráfica de $W = f(l^2)$ se muestra en la figura 3.9. Como la representación es una recta que pasa por el origen, decimos que «el peso W varía directamente con el cuadrado de la longitud del lado», o que «el peso W es directamente proporcional al cuadrado de la longitud del lado l^2».

La constante de proporcionalidad K podemos determinarla también calculando la pendiente de la recta:

$$K = m = \frac{\Delta w}{\Delta l^2} = \frac{w_2 - w_1}{l_2 - l_1} = \frac{(3.20\text{-}0.50)\ \text{lbf}}{(6.25\text{-}1.0)\ \text{pie}^2}$$

$$K \cong 0.5\ \text{lbf}/\text{pie}^2$$

Luego, la ecuación de la función potencial es:

$$W = 0.5\ l^2 \Rightarrow \text{cuando}\ l\,(\text{pie}) \Rightarrow W(\text{lbf})$$

Esta ecuación no está en el SI. Entonces, la expresamos en el SI transformando las unidades de K a este sistema:

$$k = 0.5\ \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2} \times \frac{1\text{kfg}}{2.205\,\text{lbf}} \times \frac{9.8\text{N}}{1\text{kgf}} \times \frac{(3.28\,\text{pie})^2}{(1\text{m})^2}$$

$$k = 23.9\ \text{N}/\text{m}^2$$

Luego, la ecuación en el SI será:

$$W = 23.9\, l^2 \Rightarrow \text{cuando}\ \frac{l(\text{m})}{W\,(\text{N})}$$

b. Si partimos de la ecuación en el SI tenemos:

$$\frac{W}{l^2} = 23.9\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Dividiendo ambos miembros para el espesor (e) tenemos:

$$\frac{W}{l^2 \cdot e} = \frac{23.9}{e}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Pero como $l^2 \cdot e = V$ (volumen de los cuadrados de madera)

Hemos encontrado la definición general del peso específico (Pe)

$$\frac{W}{V} = Pe$$

Con el valor del espesor (e= 20 mm= 0.02 m), determinemos el peso específico experimental:

$$Pe = \frac{W}{V} = \frac{23.9\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{0.02\ \mathrm{m}} = 1195\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

c. Sabemos que

En donde: ρ (densidad kg/m³)

g (aceleración de la gravedad m/s²)

$$\text{Luego} = \rho = \frac{(Pe)}{g} = \frac{1195\ \mathrm{kgm/s^2}}{9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot \mathrm{m^3}} \Rightarrow \rho EXP \cong 122\ \mathrm{kg/m^3}$$

d. La densidad más probable sería la que nos da el fabricante:

$$\rho T = 0.117\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} \times \frac{1\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{g}} \times \frac{(100\,\mathrm{cm})^3}{(1\mathrm{m})^3}$$

$$\rho T = 117\ \mathrm{kg/m}^3$$

Luego, el error porcentual será:

$$Ep = \frac{\pm|\rho T - \rho EXP|}{\rho T} \times 100$$

$$Ep = \frac{\pm|117 - 122|}{117} \times 100$$

$$Ep = \pm 4.3\%$$

Que es un error aceptable.

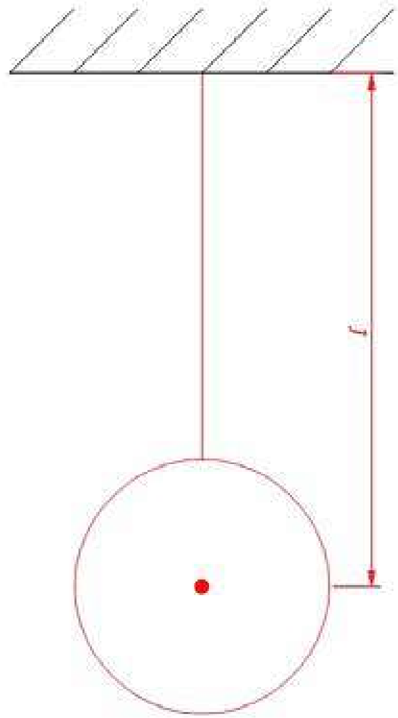
l(cm)	0	12.6	18.6	29.4	45.1	70.8	91.5
T(s)	0	0.70	0.85	1.09	1.35	1.70	2.00

Ejemplo 3.5

l(cm)	0	12.6	18.6	29.4	45.1	70.8	91.5
T(s)	0	0.70	0.85	1.09	1.35	1.70	2.00

De un clavo que pasaba por un orificio, se suspendió el extremo de un hilo que, en el otro extremo, tenía una esfera maciza de un pequeño diámetro (masa puntual) y se hizo oscilar la masa. Entonces se midió el período de oscilación (T) en función de la longitud l (ver fig. 3.10), encontrándose los siguientes resultados.

Figura 3.10 Péndulo matemático



DETERMINAR:

a. La ecuación empírica que relaciona estas dos magnitudes en el SI.

b. Partiendo de la relación anterior, puede comprobar una ley general para este caso (péndulo matemático).

c. Determine experimentalmente una constante importante en este fenómeno, como la aceleración de la gravedad (g).

d. Tomando como valor más probable para g 9.8 m/s², determine el error porcentual cometido al determinar g experimentalmente.

Solución

a. Iniciamos haciendo la gráfica T = f (l)

Figura 3.11 Período *vs.* longitud

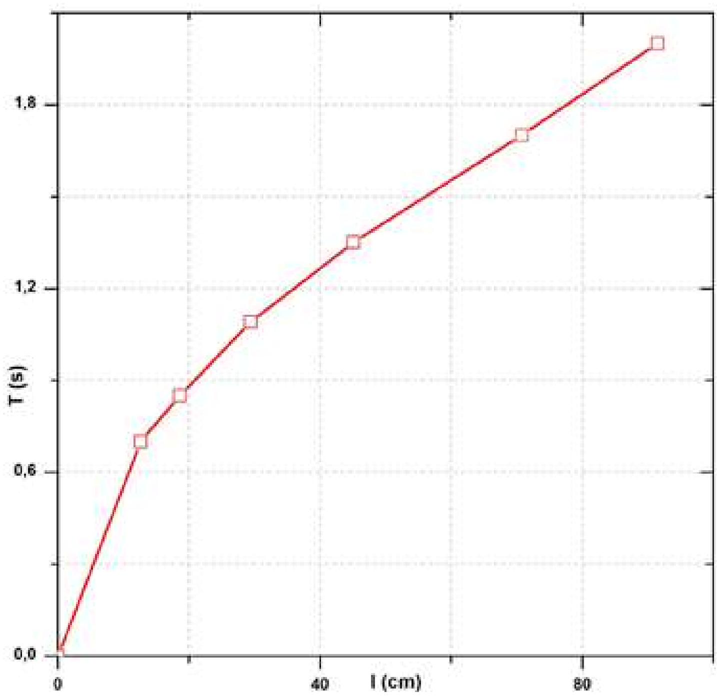
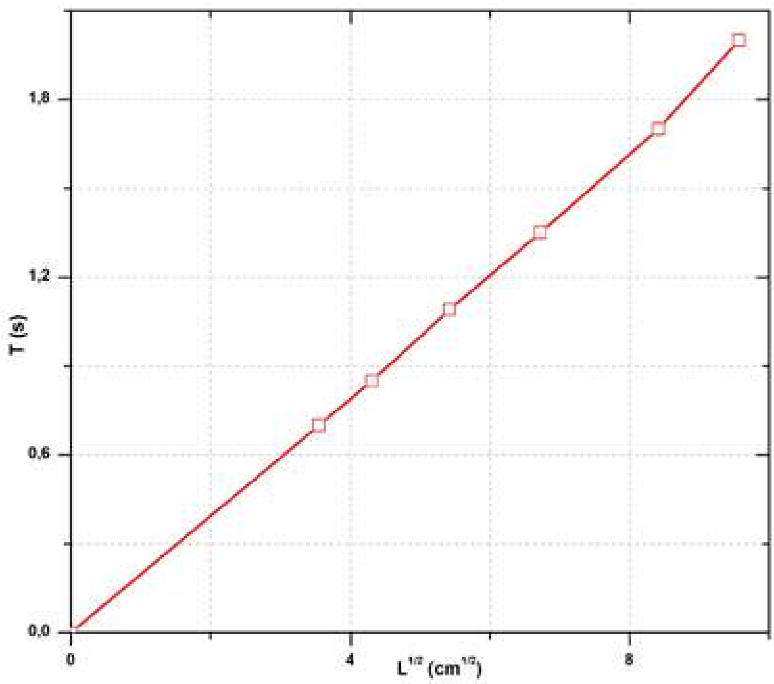


Figura 3.12 Período *vs.* longitud$^{1/2}$



La forma de la gráfica (curva) nos indica que la función no es lineal, pero podría ser potencial de la forma: $T= K\, l^n$

n: de acuerdo con la forma de la curva, puede ser un número fraccionario (+).

Damos a n el valor de ½ = 0.5, entonces preparamos la siguiente tabla de datos:

$l^{\frac{1}{2}}\left(cm^{\frac{1}{2}}\right)$	0	3.55	4.31	5.42	6.72	8.41	9.57
T (s)	0	0.70	0.85	1.09	1.35	1.70	2.00

La gráfica de la figura 3.12 es una línea recta que pasa por el origen, lo que significa que n= ½, o sea que T *α* $l^{½}$.

La constante K podemos determinarla, calculando la pendiente de la gráfica lineal, o de la siguiente forma:

$$K = \frac{Ti}{li^{1/2}} \cong 0.198\,\mathrm{s}/\mathrm{cm}^{1/2}$$

Luego, la función será definida por la siguiente ecuación empírica específica:

$$T = 0.198\ l^{1/2} = 0.198\ \sqrt{l} \Rightarrow \begin{matrix} l(\mathrm{cm}) \\ T(\mathrm{s}) \end{matrix}$$

Esta ecuación no está en el SI. Luego, la transformamos al SI:

$$K = 0.198\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}^{1/2}} \times \frac{(100\,\mathrm{cm})^{1/2}}{(1\,\mathrm{m})^{1/2}} = 0.198\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}^{1/2}} \times 10\ \frac{\mathrm{cm}^{1/2}}{\mathrm{m}^{1/2}}$$

$$K = 1.98\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^{2}}$$

Entonces, la ecuación en el SI será:

$$T = 1.98\sqrt{l} \Rightarrow \begin{matrix} l(\mathrm{m}) \\ \Downarrow \\ T(\mathrm{s}) \end{matrix}$$

b. Consultando encontramos que la ley general para el péndulo simple o matemático es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

En donde: l = longitud del péndulo simple (m)

g = aceleración de la gravedad ≅ 9.8 m/s

A esta ecuación la podemos expresar también así:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$$

Para que esta fórmula general se relacione con la ecuación empírica:

$$T = 1.98\sqrt{l}$$

Debemos comparar la constante K = 1.98 s/m^2 con el valor de:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2\ \mathrm{s}/\mathrm{m}^{1/2}$$

CONCLUSIÓN: $K \cong \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

Luego, la ecuación empírica sí representa la ley general:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

c. Partiendo de la relación

$$K \cong \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Podríamos despejar g, la aceleración de la gravedad

$$\left(\sqrt{g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2$$

$$g = \frac{4\pi^2}{K^2}$$

Entonces, con el valor de K= 1.98 s/m1/2, que es un valor experimental, podemos determinar g experimentalmente:

$$gEXP = \frac{4\pi^2}{\left(1.98\ \frac{s}{m^{1/2}}\right)^2} = 10.07\, m/s^2$$

d. El error porcentual al medir g experimentalmente en este caso será:

$$Ep = \pm \frac{|gT - gEXP|}{gT} \times 100$$

$$Ep = \pm \frac{\left|9.8\ \frac{m}{s^2} - 10.07\ \frac{m}{s^2}\right|}{9.8\ \frac{m}{s^2}} \times 100$$

$$Ep = \pm\ 2.8\%$$

Que es un error aceptable.

Ejemplo 3.6

La frecuencia de natural F de una cuerda que vibra varía con la longitud L de esta. En un experimento, se tomaron los datos que damos a continuación.

Encuentre la ecuación empírica específica que relaciona F y L en el SI.

L(m)	2.02	1.02	0,66	0.33
F(Hz)	9.93	19.61	30,72	60,45

Solución

En primer lugar, hacemos la gráfica F vs. L de acuerdo con las siguientes escalas:

Para la figura 3.13:

- L:1 cm = 0.4 m
- F:1 cm = 10 Hz

Para la figura 3.14:

- L^{-1}:1 cm = 0.5 m^{-1}
- F:1 cm = 10 Hz

Figura 3.13 Frecuencia *vs*. Longitud

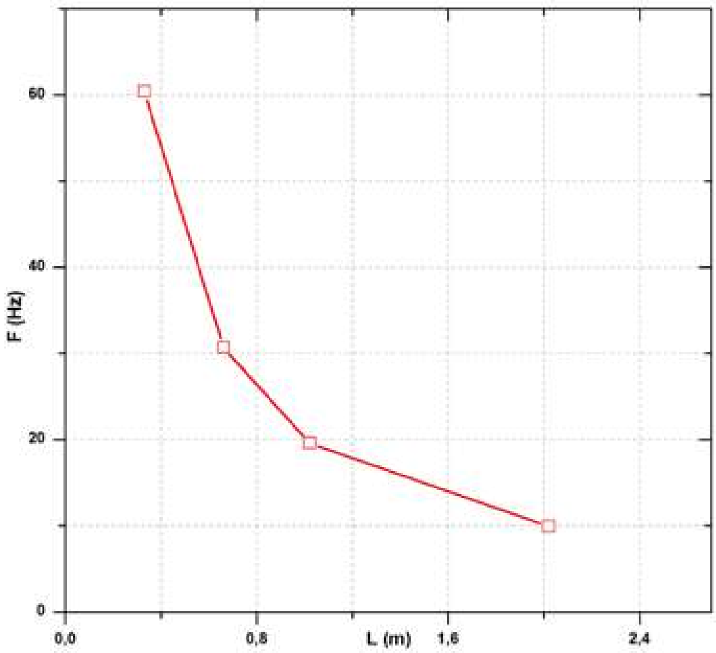
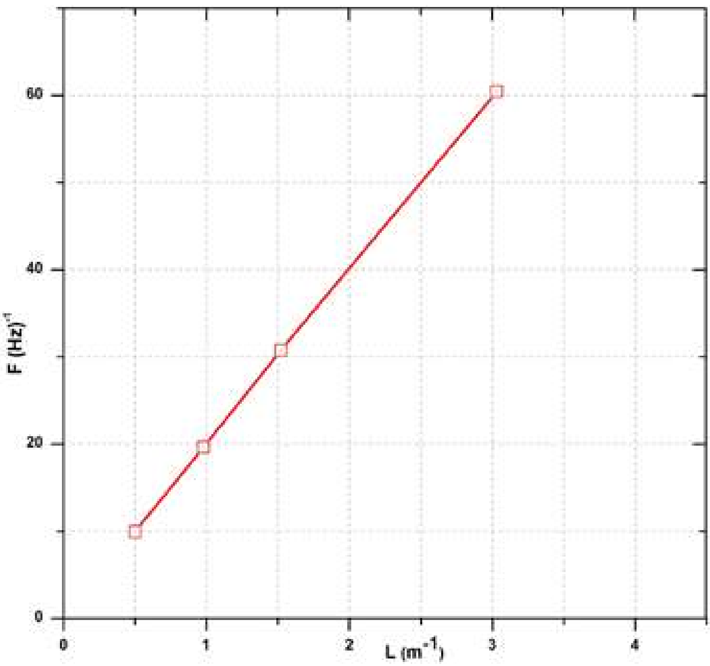


Figura 3.14 Frecuencia *vs.* 1/longitud



Como la representación que se muestra en la figura 3.13. es una curva, entonces la relación por supuesto no es lineal, pero lanzamos como hipótesis que puede ser potencial de la forma:

$$F = K L^n$$

La forma de la gráfica nos indica que n<0 o sea un número negativo. El primer número entero negativo que le damos a n= -1 entonces preparamos una tabla de datos de F en función de [L^{-1} (1/L)].

1/L (L^{-1}) [1/m=m^{-1}]	0.50	0.98	1.52	3.03
F (Hz= ciclo/s)	9.93	19.61	30.72	60.45

Utilizando las siguientes escalas:

1/L: 1 cm= 0.5 m^{-1} ; F: 1 cm= 10 Hz.

Se obtuvo la gráfica que se muestra en la figura 3.14. Como la gráfica es una recta que pasa por el origen, esto significa que la frecuencia (F) es directamente proporcional a L^{-1}(1/L), o que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud.

El valor de la constante K podemos determinarlo a través de la pendiente de la Fig. 3.14:

$$K = m = \frac{\Delta F}{\Delta \frac{1}{L}} = \frac{0 - 30}{3.3 - 1.8} = 20 \text{ Hz}/\text{m}^{-1} = 20\,\text{Hz}\cdot\text{m}$$

$$F = 20\,L^{-1} = \frac{20}{L}$$

3.2. UTILIZACIÓN DE LOS LOGARITMOS PARA RESOLVER FUNCIONES POTENCIALES Y EXPONENCIALES.

3.2.1. Conceptos fundamentales

3.2.1.1. Números como potencias

Se puede demostrar que todo número positivo real N se puede expresar por una potencia de un número positivo real dado b, siempre que b no sea igual a 1.

Es decir: $N = b^{\Phi}$

Luego, para escribir el número N en forma de potencia de una base dada b, se debe saber el exponente Φ al que hay que elevar la base b para obtener el número N.

3.2.1.2. Definición de logaritmo

El logaritmo de un número N en una base conocida b es la potencia Φ a la cual debe ser elevada la base para igualar al número N. En símbolos matemáticos:

$$\Phi = \log_b N$$

Cualquier número positivo, excepto el uno, se puede usar como base.

Ejemplo 3.7

Para escribir el número 8 en forma de potencia en base 2, la potencia a la que hay que elevar el 2 para obtener 8 es 3, así:

$$8 = 2^3$$

Lo que significa que el logaritmo de 8 (log 8) en base 2 (log2 8) es 3. así.

$$\log_2 8 = 3$$

Ejemplo 3.8

Recíprocamente, la ecuación logarítmica:

$$\log_3 81 = 4$$

Escrita en forma exponencial seria:

$$81 = 3^4$$

3.2.1.3. Logaritmos comunes

Los logaritmos con base 10 se llaman «LOGARITMOS COMUNES» o de Brigg. Se acostumbra simplemente a escribir: log N en lugar de $\log_{10}$ N.

Los logaritmos comunes de 10; 1000; 0.1; 0.001.

$$\log 10 = ? \qquad 10 = 10^{1}$$

$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \log 10 = 1$$

$$\log 1000 = ? \qquad 1000 = 10^{3}$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 0.1 = ? \qquad 0.1 = 10^{-1}$$

$$\log 0.1 = -1$$

$$\log 0.001 = ? \qquad 0.001 = 10^{-3}$$

$$\log 0.001 = -3$$

Como se muestra, un logaritmo puede tener un valor negativo si el número N es menor que 1 y la base es mayor que 1.

3.2.1.4. Logaritmos naturales

Los logaritmos y sus leyes se aplican para cualquier base. Muchas deducciones teóricas en la ciencia se efectúan mejor cuando los números se expresan como una potencia de una base cuyo valor es un número periódico: e= 2.71828…

Así cualquier número N real positivo se puede escribir en la forma:

$$N = e^{x}$$

Según la definición de logaritmos tenemos que:

$$\mathrm{Log}_e\, N = X$$

El logaritmo de un número N en base e se llama el logaritmo natural o neperiano y se escribe: *ln* N

3.3. LEYES DE LOS LOGARITMOS

3.3.1. Primera ley de los logaritmos

El logaritmo de un producto de dos números A y B es igual a la suma de sus logaritmos:

$$\log(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \log \mathbf{A} + \log \mathbf{B}$$

3.3.2. Segunda ley de los logaritmos

El logaritmo de un cociente de dos números A y B es igual a la diferencia de sus logaritmos:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

3.3.3. Tercera ley de los logaritmos

El logaritmo de un número N elevado a una potencia n es igual al producto de la potencia por el logaritmo del número:

$$\log N^{n} = n \log N$$

Ejemplo 3.9

¿Cómo determinar el logaritmo de una base desconocida en función de una base conocida?

$$X = \log_{e} N \Rightarrow N = e^{x}$$
$$X = \ln N$$

Aplicando logaritmos comunes a la ecuación exponencial:

$$\log \mathrm{N} = x \log e$$
$$x = \frac{\log \mathrm{N}}{\log e}$$

$$y = \log_4 \mathrm{N}$$
$$\mathrm{N} = 4^y$$

$$\log \mathrm{N} = y \log 4$$
$$y = \frac{\log \mathrm{N}}{\log 4}$$

3.4. UTILIZACIÓN DE LOGARITMOS PARA RESOLVER FUNCIONES POTENCIALES

3.4.1. De proporción directa

Como se vio anteriormente, una función potencial de proporción directa general tiene la forma:

$$y = K X^n$$

Aplicando logaritmos comunes a ambos miembros de esta ecuación resulta:

$$\log y = \log K X^n$$

Aplicando las leyes de los logaritmos tenemos:

$$\log y = \log K + \log X^n$$

Y finalmente:

$$\log y = \log K + \log X^n \qquad (3.6)$$

Si hacemos que:

$y = y$

$K = b$

$x = x$ $\quad\quad n = m$ tendremos : $y = b + mx$

Por analogía, concluimos que la ecuación (3.6) es una ecuación que define a una función lineal logarítmica.

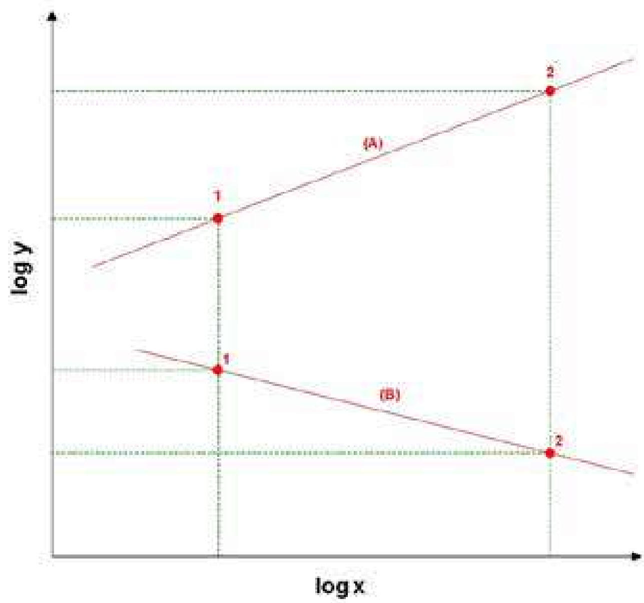
Por lo tanto, si la función es potencial, al construir la gráfica log y en función de log x, esta necesariamente será una línea recta que no corta el origen (fig. 3.15.). Esto confirmará o verificará la hipótesis de que la función es potencial de la forma:

$$y = Kx^n$$

En donde el exponente n, que puede ser un número real cualesquiera (positivo o negativo; entero o fraccionario), se lo puede hallar fácilmente determinando la pendiente de la gráfica lineal de la figura 3.15., así:

$$n = \tan\theta = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Figura 3.15 Gráfica logarítmica de una función potencial



Pendiente que será positiva (+) si la inclinación de la línea recta es como la de la figura 3.15. (A) y negativa (-) si la inclinación es como la de la figura 3.15. (B).

Y la constante K se puede obtener de dos maneras:

Gráficamente

Según la ecuación (3.6) si log X=0 y para que esto sea así: X= 1; entonces, si log 1= 0, para este valor, según la Ec. Log y = log K, o sea:

$$y = K$$

Es decir que gráficamente, podemos leer directamente el valor de K que será aquel valor que tome "y" cuando X= 1 en la gráfica logarítmica.

Analíticamente

De la ecuación (3.8) despejamos:

$$\log K:$$
$$\log K = C$$
$$K = 10^{c} = anti\log C$$

Otra forma de obtener K sería, luego de calcular la pendiente *n*, despejarla de la ecuación potencial directamente:

$$y = K x^{n} \qquad\qquad K = \frac{y_p}{x_p^{n}}$$

Eligiendo las coordenadas de un punto cualesquiera P, determinamos la constante K; además, sus unidades físicas se pueden determinar fácilmente desde esta última relación, lógicamente dependerá de las unidades en que vengan medidas las magnitudes X y Y. Si es que debemos trabajar en el SI de unidades, no hace falta que las magnitudes, a partir de la tabla de datos, estén en el SI. Mejor será trabajar en las unidades experimentales de X y Y y al final, transformando la constante K al SI, bastará para expresar la ecuación empírica específica en el SI de unidades.

Este método logarítmico para determinar funciones potenciales es muy práctico, ya que, sea cual fuere el valor de n y de la constante K, se pueden determinar muy fácilmente a partir de la gráfica logarítmica. Sin embargo, si cree tener dificultad en la realización de la gráfica: log y vs. log x, el uso de un papel logarítmico, previamente realizado, le permitirá construirla con facilidad.

3.4.2. Construcción de un papel logarítmico.

Para transformar un eje de papel milimetrado en eje logarítmico (trabajando con logaritmos comunes) en base 10, sabemos que:

log 1 = 0

RANGO = 1 unidad logarítmica

log 10 = 1

RANGO = 1 unidad logarítmica

log 100 = 2

RANGO = 1 unidad logarítmica

log 1000 = 3

EJEMPLO ESCALA: 1 unidad logarítmica= 10 cm

log 2 = 0.301 equivale a 3.01 cm (aprox.)

log 3 = 0.477 equivale a 4.77 cm (aprox.)

log 4 = 0.602 equivale a 6.02 cm (aprox.)

log 5 = 0.699 equivale a 6.99 cm (aprox.)

log 6 = 0.778 equivale a 7.78 cm (aprox.)

log 7 = 0.845 equivale a 8.45 cm (aprox.)

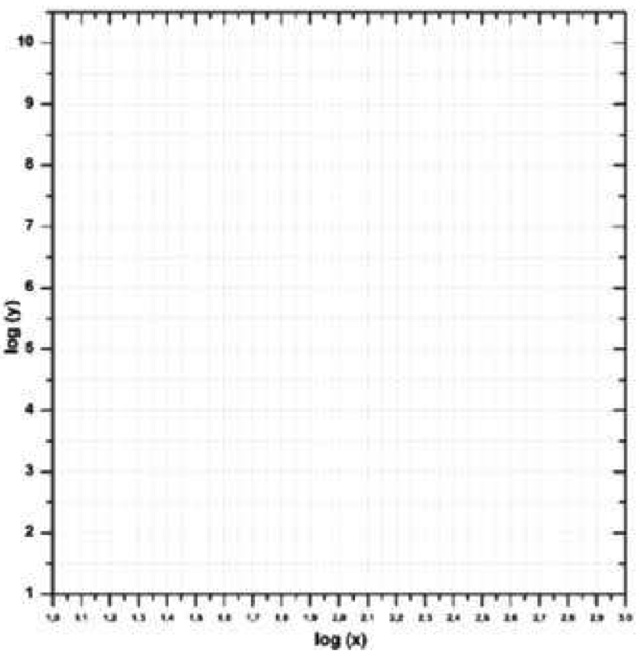
log 8 = 0.903 equivale a 9.03 cm (aprox.)

log 9= 0.954 equivale a 9.54 cm (aprox.)

log 10= 1.000 equivale a 10 cm (aprox.)

Si representamos estos valores de los logaritmos en un eje milimetrado con la escala indicada, por ejemplo, lo convertimos en eje logarítmico (Fig. 3.16).

Figura 3.16 Construcción del papel logarítmico



Existen, en el mercado, papeles logarítmicos construidos con diversas escalas; entonces, se puede utilizar uno de ellos. Para representar los datos en este papel, como logaritmo de cero no existe, por supuesto, no es posible representar este valor, se deberá iniciar en el eje logarítmico con un valor múltiplo o submúltiplo de diez (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …, 1, 10^{1}, 10^{2}, 10=…) de acuerdo con los valores que se vaya a representar, tanto en log x como en log y.

EJEMPLO 3.10

Al medir el periodo (T) en un péndulo de resorte, en función de la masa (m) suspendida se obtuvieron los siguientes resultados experimentales:

m(Oz)	0	1	4	9	16	25	36	49
T(s)	0	2	4	6	8	10	12	14

Determine por el método más adecuado la función que existe entre estas magnitudes o variables y exprésela en la mejor forma (ecuación) en unidades del SI.

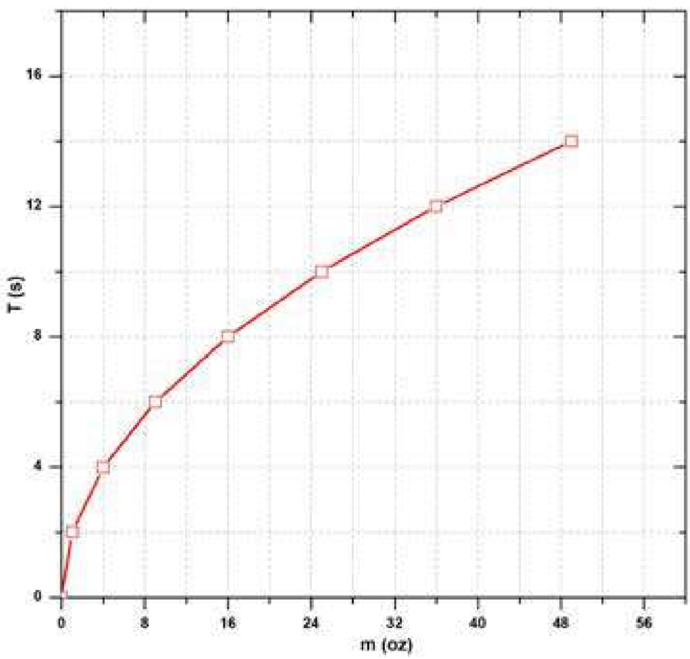
DESARROLLO:

Se va a determinar T=f(m). Realizamos la:

GRÁFICA: Escalas: m: 1 cm = 4 oz (onzas)

T: 1 cm = 2 s (segundos)

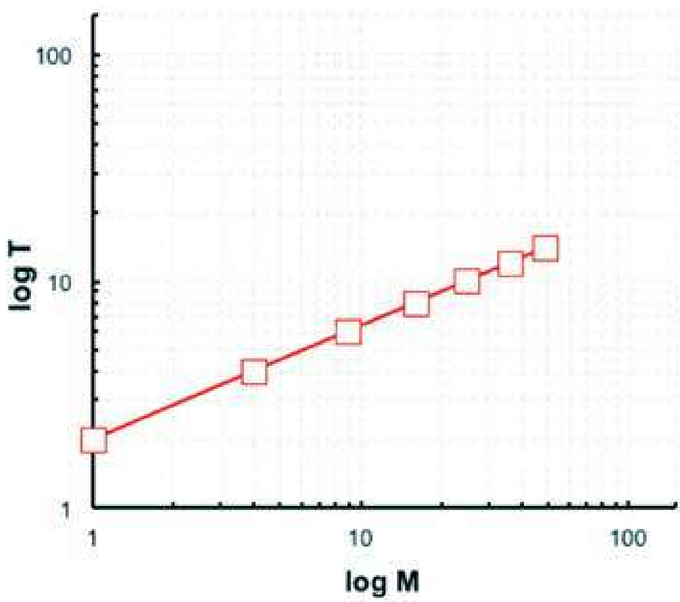
Figura 3.17 Curva T *vs* m



Como esta gráfica es una curva, concluimos que no es una función lineal, y lanzamos como hipótesis que puede ser una función potencial de proporción directa de la forma: T= Km^n.

Verificamos esta hipótesis realizando una gráfica log T *vs.* log m (fig. 3.18)

Figura 3.18 log T *vs.* log M



Como esta gráfica es lineal, entonces verificamos inmediatamente esta hipótesis, ya que la ecuación de esta línea recta es:

$$\log T = \log k + n \log m$$

Calculamos n mediante determinación de la pendiente:

$$n = \frac{\log T_2 - \log T_1}{\log m_2 - \log m_1}$$

$$n = 0.5$$

La constante K la podemos determinar:

Gráficamente

Cuando: m=1 T=2

T=K K=2

O también:

Analíticamente

$$T = K \cdot m^{0.5}$$

De donde:

$$K = \frac{Tp}{m_{\mathrm{p}}^{0.5}} = \frac{10}{(25)^{0.5}} \left[\mathrm{s}/(\mathrm{oz})^{0.5}\right]$$

$$\mathrm{K} = 2\,\frac{\mathrm{s}}{(\mathrm{oz})^{0.5}}$$

Luego, la ecuación empírica específica es:

$$T = 2\,m^{0.5} = 2\sqrt{m} \Rightarrow \begin{array}{c} m\,(\mathrm{oz}) \\ \Downarrow \\ T\,(\mathrm{s}) \end{array}$$

Para ello bastara transformar la constante de proporcionalidad al SI de la siguiente forma:

$$K = 2\,\frac{\mathrm{S}}{(\mathrm{oz})^{0.5}} \times \frac{(16\ \mathrm{oz})^{0.5}}{(1\ \mathrm{lb})^{0.5}} = 2\,\frac{\mathrm{S}}{(\mathrm{oz})^{0.5}} \times \frac{4\,(\mathrm{oz})^{0.5}}{\mathrm{lb}^{0.5}}$$

$$K = 8\,\frac{\mathrm{S}}{(\mathrm{lb})^{0.5}} \times \frac{(2.205\ \mathrm{lb})^{0.5}}{(1\ \mathrm{kg})^{0.5}} = 8\,\frac{\mathrm{S}}{(\mathrm{lb})^{0.5}} \times \frac{1.485\,(\mathrm{lb})^{0.5}}{\mathrm{kg}^{0.5}}$$

$$K = 11.88\,\frac{\mathrm{S}}{(\mathrm{kg})^{0.5}}$$

La misma que está en el SI:

Ahora: $T = 11.88\sqrt{m}$

En la cual, cuando m(kg), el período T vendrá medido en (s).

Ejemplo 3.11

La resistencia a la rotura S de una cuerda de manilla trenzada es una función de su diámetro D. Determine la ecuación empírica específica a partir de los datos que se dan en la siguiente tabla y exprésela en el SI.

D(pul)	0.0	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0	2.25
S(lbf)	0.0	1700	2630	3700	5000	6500	8200

Solución

Iniciamos realizando la gráfica de S en función del D, utilizando la siguiente escala (fig. 3.19)

D: 1 cm = 0.25 pul S: 1 cm = 1000 lbf

Como la gráfica es una curva, la relación no es lineal, pero podríamos decir que puede ser «función potencial de proporción directa» de la forma general:

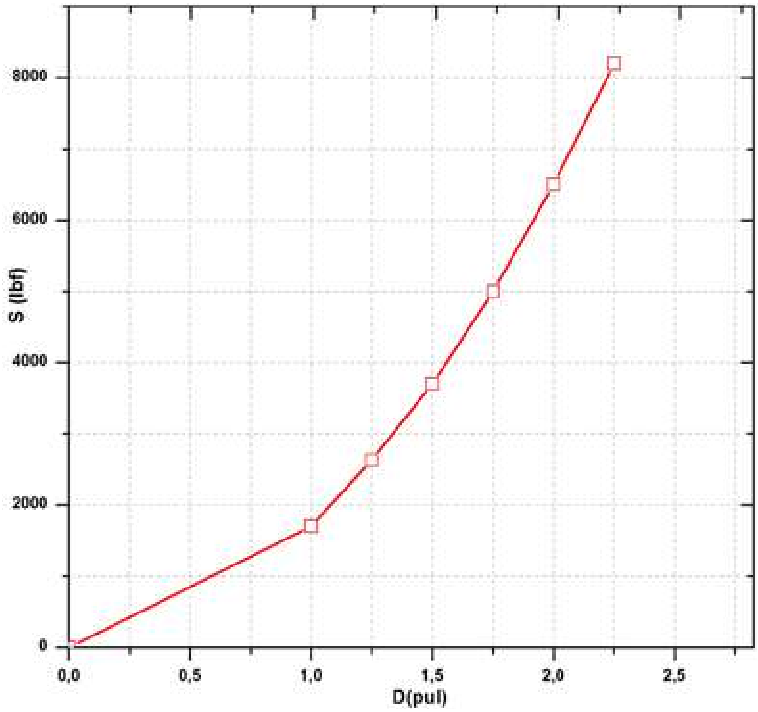
$$S = K D^n$$

La forma más directa de verificar esta hipótesis es haciendo la gráfica de:

$$\log S = f(\log D)$$

Procedemos a hacer esta gráfica:

Figura 3.19 S *vs.* D (curva)



Como esta gráfica no es lineal, verificamos inmediatamente que la función es potencial directa y la ecuación de esta línea recta es:

$$\log S = \log K + n \log D$$

La constante n la podemos determinar:

$$n = \frac{\log S_2 - \log S_1}{\log D_2 - \log D_1}$$

$$n = \frac{\log 6500 - \log 1700}{\log 2 - \log 1}$$

$$n = 1.935$$

La constante K la podemos determinar:

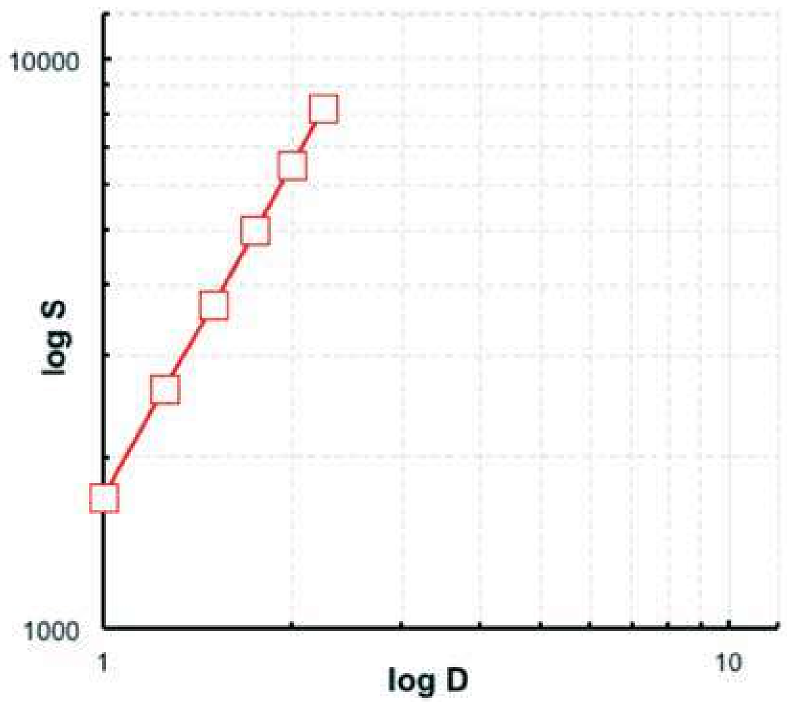
Gráficamente:

Cuando: D = 1 pul

$$S = K\,D^{1.935}$$

O también analíticamente: $K = \dfrac{Sp}{D_p^{1.935}} = \dfrac{6500}{2^{1.935}} \cong 1700$

Figura 3.20 log S *vs*. log D



Luego, la ecuación empírica específica es:

$$S = 1700D^{1.935}$$

Esta ecuación es válida para

Ahora, pasamos esta ecuación al SI:

Para ello bastará transformar la constante K al SI:

$$K = 1700\ \frac{\text{lbf}}{\text{pul}^{1.935}} \times \frac{1\ \text{kgf}}{2.202\ \text{lbf}} \times \frac{9.8\ \text{N}}{1\,\text{kgf}} \times \frac{(39.4\ \text{pul})^{1.935}}{(1\,\text{m})^{1.935}}$$

$$K = 925000 = 9.25 \times 10^{5}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^{1.935}}$$

La misma que está en el SI.

Luego, $S = 9.25 \text{ x } 10^{5} D^{1.935}$

En la cual, cuando D (m) $\Longrightarrow$ S (N)

3.5. FUNCIONES EXPONENCIALES

La función $f(x) = a^{x}$

Se llama función exponencial ya que la variable X aparece como exponente y la base a debe ser un número positivo real diferente de la unidad.

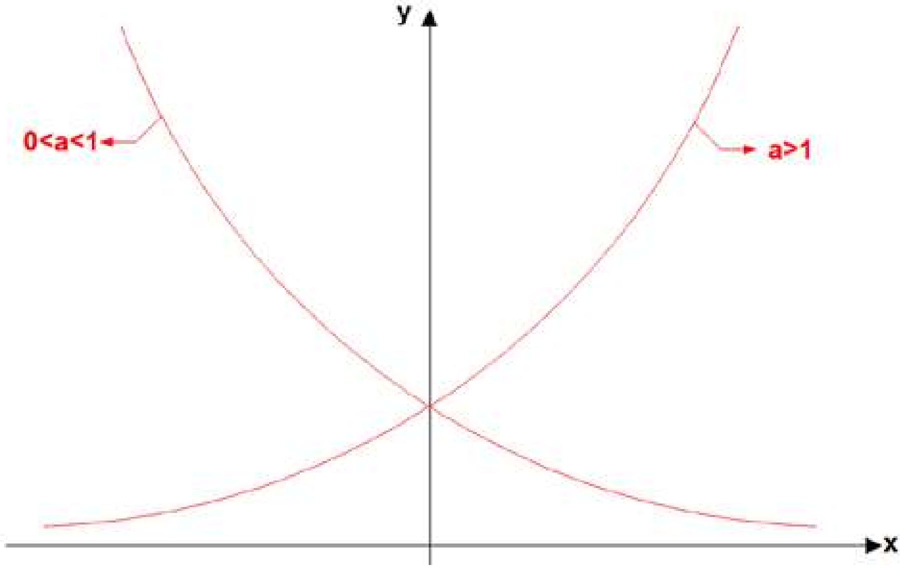
Si a = e (la base de los logaritmos naturales)

e^{x} Suele escribirse también: exp x

3.5.1. Gráficas de una función exponencial

En la figura 3.21, se muestran una gráfica general de una función exponencial: Y= a^{x} cuando a >1 y también para cuando 0 < a < 1.

Figura 3.21 Gráfica de $y = a^x$



En la ciencia, hay muchas funciones exponenciales que se definen por medio de ecuaciones de la forma:

$$y = C\,e^{KX}$$

Donde C y K son constantes (N° reales cualesquiera).

Si K es positiva, la función exponencial es creciente y, si K es negativa, la función exponencial será decreciente.

Ejemplo 3.12

El número de neutrones en un reactor nuclear se puede predecir por la ecuación $n = n_0 e^{t/T}$, donde n = número de neutrones en el instante $t_0 = 0$ y T= período del reactor.

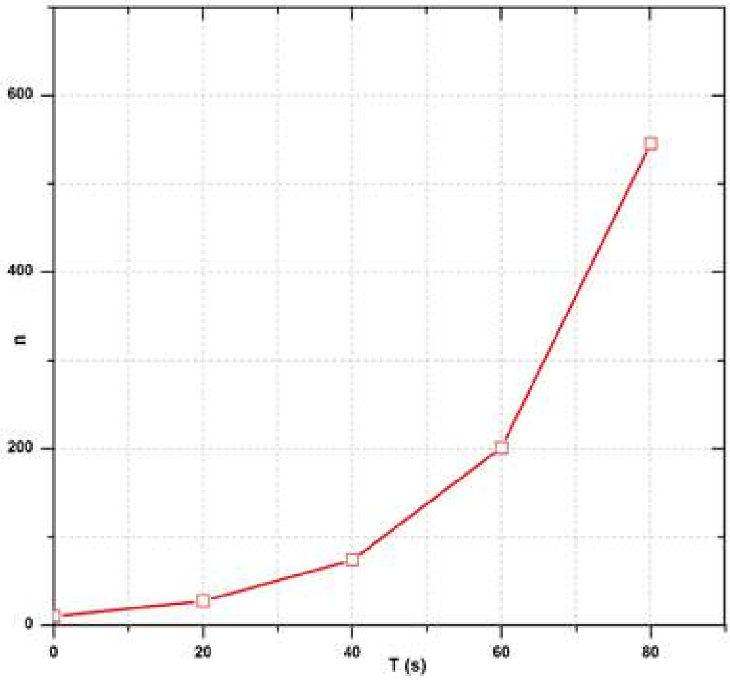
Así cuando n_0= 10 neutrones y T= 20 s. La ecuación se convierte en:

$$n = 10\,e^{t/T} = 10e^{0.05\,t}$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 3.22.

t	0	20	40	60	80
n	10	27.18	73.9	200.9	546

Figura 3.22 Gráfica de n =10e $^{0.05\,t}$



Ejemplo 3.13

El decrecimiento radiactivo nos da un ejemplo de una función exponencial con exponente negativo. Todos los elementos radioactivos se desintegran de acuerdo con la ecuación:

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

$\boldsymbol{m_0}$ = masa inicial de los átomos «padres»

$\boldsymbol{m}$ = masa de estos átomos que queda después de un tiempo t

$\boldsymbol{\lambda}$ = constante característica del elemento dado

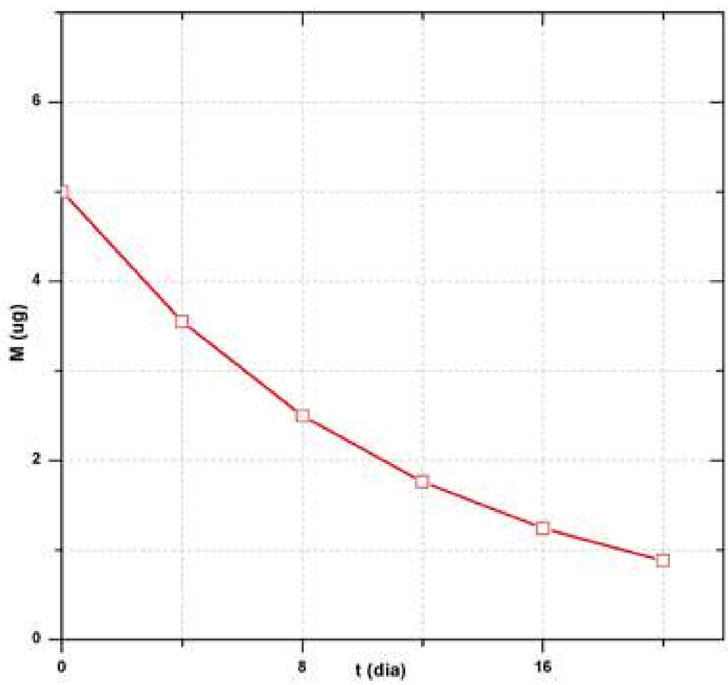
Por ejemplo, para el yodo -131, el valor de λ= 0.087 por día.

Si se comienza con 5 μg de este elemento, el número de microgramos que quedan después de t días será dado por la ecuación:

$$m = 5e^{-0.087\,t}$$

t (día)	0	4	8	12	16	20
m(μg)	5	3.55	2.5	1.76	1.24	0.88

Figura 3.23 Curva de decrecimiento radioactivo



La gráfica de esta función se muestra en al figura 3.23. la curva muestra el llamado decrecimiento exponencial. O sea que, cuando el valor de t aumenta, el valor de m decrece proporcionalmente a sí mismo.

3.5.2. Resolución de funciones exponenciales utilizando logaritmos

Cuando estamos investigando, la relación que existe entre dos magnitudes (o variables), y si la relación (gráficas), entre las dos variables en una curva, podemos lanzar como hipótesis de que se trata de una función potencial directa de la forma general:

$Y = K \cdot x^n$ y si al hacer la gráfica ($\log y$ *vs*. $\log x$) que es la que verifica esta hipótesis; resultara no una línea recta aproximada, sino una recta deformada (medio curva), significaría que la función no es potencial.

Entonces debemos formular una nueva hipótesis, la misma que sería «se trata de una función exponencial» de la forma general:

$$\mathrm{y} = \mathrm{C} \cdot 10^{mx}$$

¿Cómo podríamos verificar esta hipótesis? Una forma directa y sencilla sería aplicando logaritmos comunes a ambos miembros de esta ecuación, resultando:

$$\log y = \log C \times 10^{mx}$$

Aplicando las leyes de los logaritmos tenemos:

$$\log y = \log C + mx \log 10$$

Como log 10 = 1 resultaría finalmente:

$$\log y = \log C + mx$$

Si hacemos que: log y = y ; log C = b obtenemos:

$$y = b + mx$$

Que es la ecuación de una línea recta con pendiente m, e intersección sobre el eje Y igual a b.

Lo que significa que, al aplicar logaritmos a la ecuación exponencial, hemos obtenido una ecuación lineal semilogarítmica.

Para obtener esta línea recta, se debe graficar: log y vs. x y si esta gráfica es una línea recta, estaríamos verificado dicha hipótesis. Luego, la función sería una función exponencial, de la forma:

$$y = C \cdot 10^{mx}$$

En donde el coeficiente m que acompaña a la variable X, se determina al calcular la pendiente de la gráfica semilogarítmica, y el coeficiente C es la intersección sobre el eje log y.

Para no estar graficando los valores de log y, es bueno confeccionar un papel, en el que el eje vertical (Y) sea logarítmico, este papel se llama «papel semilogarítmico», ya que el eje X es normal, es decir proporcional a los números reales.

Una vez que se ha determinado la ecuación empírica específica exponencial en la forma:

$$y = C \cdot 10^{mx}$$

Es útil transformarla a cualquier otra base en lugar de (10) como por ejemplo la base de los logaritmos naturales (el número e = 2.71828…), cuya forma general sería:

$$y = a \cdot \mathrm{e}^{nx}$$

Esta transformación simplemente se la realiza, haciendo que:

$$a = C$$

$$n = \frac{m}{\log e} = \frac{m}{0.4343} \cong 2.3m$$

Demostrando:

$$\mathrm{y} = \mathrm{C} \cdot 10^{mx} \qquad (\mathrm{A})$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{a.e}^{nx} \qquad (\mathrm{B})$$

Aplicando logaritmos:

$$\log y = \log C + mx \cancel{\log} 10$$
$$\log y = \log C + mx \left(A^{1}\right)$$
$$\log y = \log a + \left(n \log e\right) \times \left(B^{-1}\right)$$

Como:

$$A^{1} = B^{-1}$$

Por analogía:

$$\log C = \log a \Rightarrow a = c$$
$$m = n \log e \Rightarrow n = \frac{m}{\log e}$$

Ejemplo 3.14

Al medir la resistencia (R) en función de la longitud (L) en un elemento pasivo electrónico, se encontraron los siguientes resultados:

R (Ω)	6.7	28.1	118.6	500.0	2108.5
L (mm)	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25

Determinar la función entre estas variables (magnitudes) y expresarla de la mejor manera (ecuación) en unidades del SI.

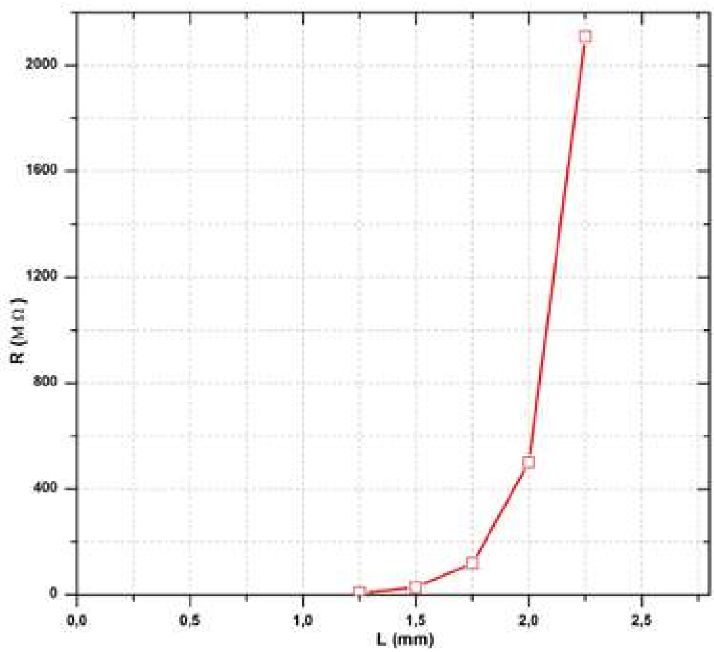
Si la función es exponencial exprésela en base 10 y base e.

Se va a determinar: R= f(L). Para ello realizamos la gráfica:

ESCALAS: L:1 cm = 0.25 mm

R: 1 cm = 200 MΩ

Figura 3.24 Gráfica una curva



La gráfica es una curva, pero analizando su crecimiento con valores proporcionales de la longitud (L), lanzamos como hipótesis que es una función exponencial de la forma general:

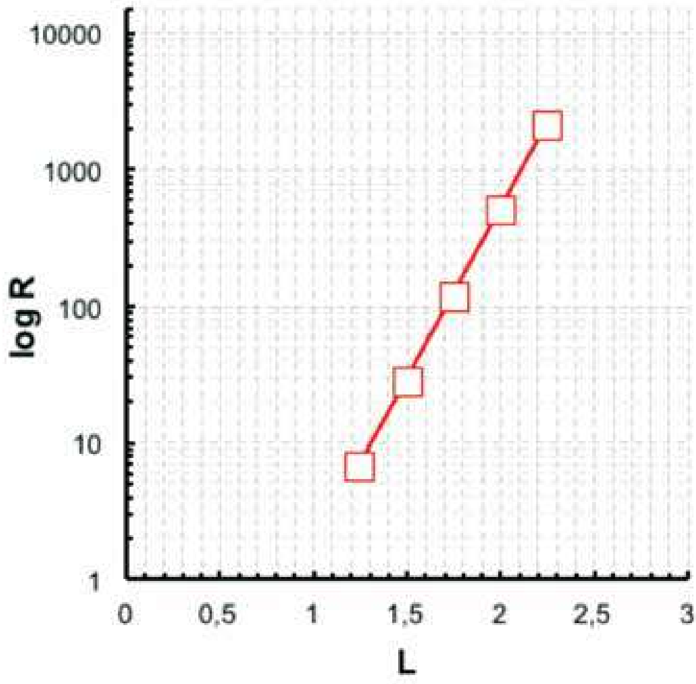
$$R = C \cdot 10^{mL}$$

Esta hipótesis la podemos comprobar aplicando logaritmos comunes a la ecuación anterior. Se obtiene:

$$\log R = \log C + mL$$

Que es una ecuación lineal semilogarítmica (log R vs L), lo que nos sugiere realizar una gráfica semilogarítmica de la forma descrita (para papel logarítmico) con la particularidad de que, en este caso, solo el eje vertical (log y) se lo transforma en eje logarítmico; el eje x es un eje normal (proporcional). Como ya existen papeles semilogarítmicos, construidos con diferentes escalas, simplemente procedemos a utilizar este papel, al cual transportamos los datos de este ejemplo con las escalas adecuadas indicadas en la figura 3.25.

Figura 3.25 Gráfica log R *vs*. L



A pesar de que solo se pudieron representar en las gráficas tres datos (puntos) con el papel utilizado, es obvio que la gráfica es una recta; por lo tanto, la hipótesis planteada es verdadera. Así, podemos procedemos a calcular los valores de las constantes:

- Cálculo de m: esta es la pendiente:

$$m = \frac{\log R_2 - \log R_1}{L_2 - L_1} = \frac{\log 500 - \log(28.1)}{2 - 1.5} \Rightarrow m = 2.5$$

- Cálculo de C: despejando de la función exponencial:

$$C = \frac{R_1}{10^{mL}} = \frac{118.6}{10^{2.5(1.75)}} = C = 0.005$$

Luego, la ecuación exponencial en base 10 sería:

$$R = 0.005 \times 10^{2.5L} \Rightarrow \text{en donde} \quad L(\text{mm}) \Rightarrow R\,(\text{M}\Omega)$$

También se la puede expresar en base e:

$$R = C\mathrm{e}^{nL}$$

$$n = 2.3m = 2.3\,(2.5\ ) \Rightarrow n = 5.75 \qquad \text{luego:}$$

$$R = 0.005\,\mathrm{e}^{5.75\,L} \Rightarrow \text{en donde: L}\,(\text{mm}) \Rightarrow R\,(\Omega)$$

Para expresar estas ecuaciones en el SI, lo hacemos a través de las constantes:

$$C = 0.005\ \text{M}\Omega \times \frac{10^{6}\Omega}{\text{M}\Omega} = 5000\Omega$$

$$m = 2.5\,\frac{1}{\text{mm}} \times \frac{\text{mm}}{10^{-3}\text{m}} = 2500\,\frac{1}{\text{m}} \qquad \text{luego:}$$

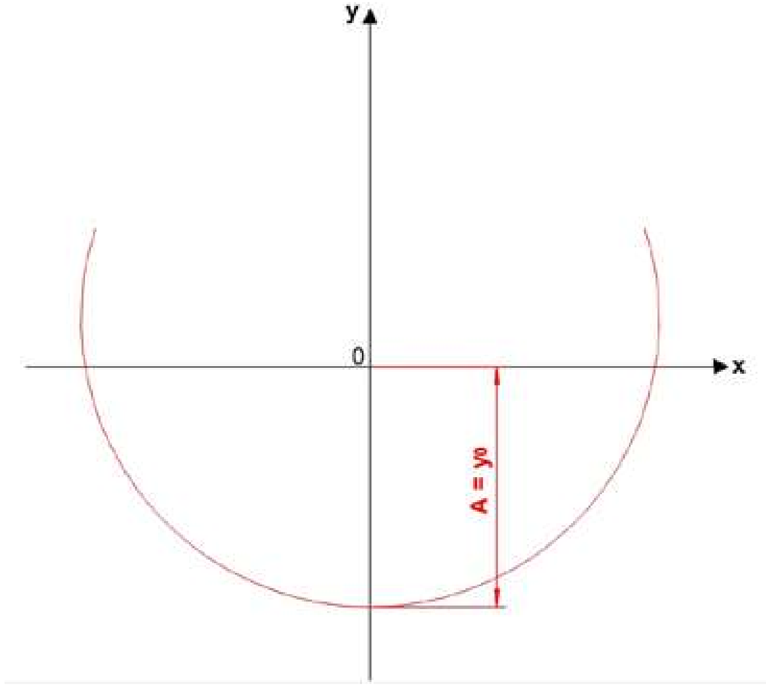
$$R = 5000 \times 10^{2500\,L} \Rightarrow \text{en donde } L(\text{m}) \Rightarrow R\,(\Omega)$$

$$R = 5000\,\mathrm{e}^{5750\,L}$$

3.6. FUNCIONES POLINOMIALES

Si la gráfica Y en función de X es una curva como la de la figura 3.26. y si consideramos que no es una función potencial directa (Y= KX^n), ni una exponencial (Y= C10mx), otra alternativa puede ser que es una función polinomial de orden enésimo (representada por una ecuación con varios términos). En este caso, se puede lanzar como hipótesis que es esta función, pero iniciamos definiendo el polinomio. Por ejemplo, consideramos que nuestra primera idea sea un:

Figura 3.26 Función polinomial



3.6.1. Polinomio de segundo orden

El mismo que está definido por la siguiente ecuación:

$$Y = A + BX + CX^2$$

En donde A, B y C son constantes arbitrarias.

Podríamos verificar esta hipótesis utilizando los siguientes artificios matemáticos en la ecuación anterior:

$$Y - A = X\left(B + CX\right)$$

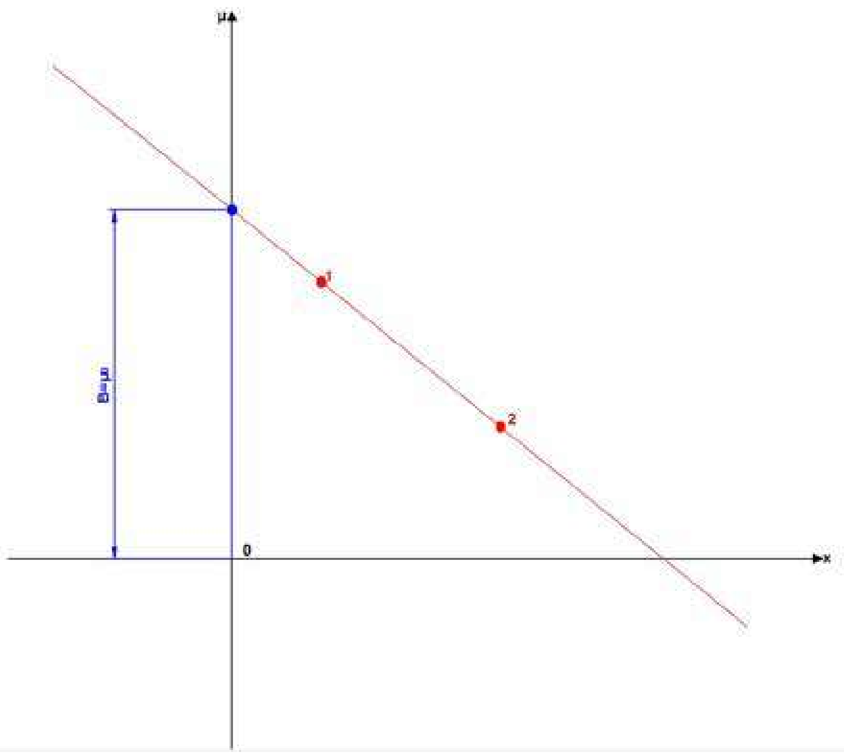
$$\frac{Y - A}{X} = B + CX$$

Llamando a $\mu = \dfrac{Y - A}{X}$ una nueva variante tenemos:

$$\mu = B + CX$$

Hemos obtenido una ecuación lineal de μ= f(x). Este resultado sugiere realizar una gráfica de μ *vs*. x para comprobar la hipótesis. Si esta gráfica fuese una recta aproximada, la hipótesis sería verdadera, y si el mismo es una curva, la hipótesis sería falsa. Para realizar la gráfica μ *vs*. x, debemos hallar los valores de $\mu = (Y\text{-}A)/X$. Para esto se requiere obtener previamente el valor de la constante A, la misma que teóricamente se puede obtener en la ecuación y representa el polinomio de segundo orden y sería el valor que tomaría Y= A, cuando X=0. Esta ecuación se considera representada por la gráfica Y= f(x) (fig. 3.26.). Luego de leer en esta gráfica el valor de A, que sería el valor que toma Y cuando X=0, si la curva no cortaría el eje de las Y cuando X=0, debemos prolongar la curva simétrica, siguiendo la simetría con un curvígrafo.

Figura 3.27 μ vs. x (recta)



Con el valor de A, se determinan los valores de μ y con una escala adecuada realizamos la gráfica μ vs. X. Si esta gráfica resulta una recta aproximada como la de la figura 3.27, comprobaríamos que nuestra hipótesis (función polinomial de segundo orden) es correcta y pasaríamos a determinar las constantes B y C.

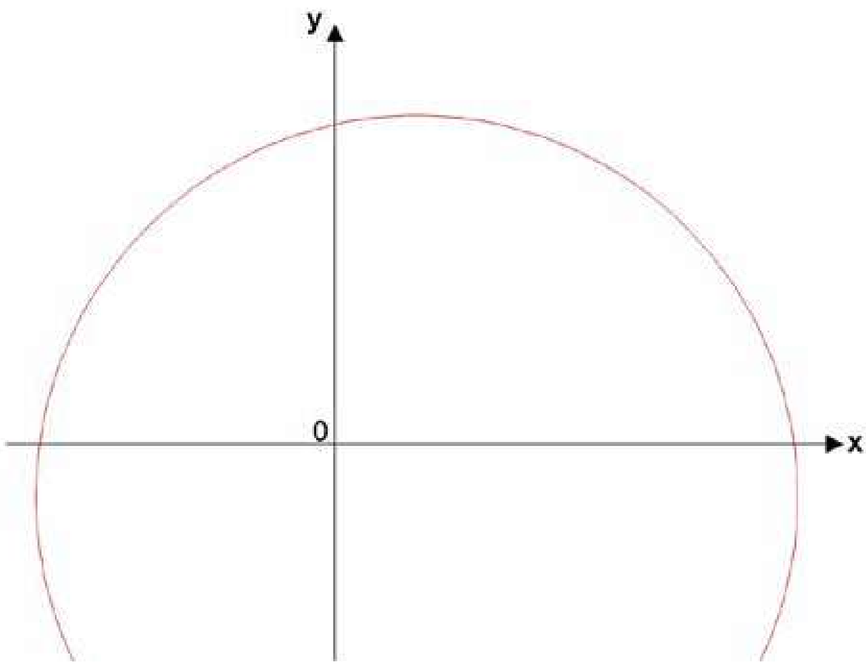
El valor de B sería aquel valor que toma μ cuando X=0, el mismo que podríamos leer en la figura 3.27 y, el valor de C corresponde a la pendiente de esta misma gráfica:

$$C = \frac{\Delta\mu}{\Delta x} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{x_2 - x_1}$$

Estos valores se remplazarían en la ecuación polinomial de segundo orden general y se obtendría la ecuación empírica particular para un caso muy específico.

Ahora, si la gráfica μ vs. X resultaría ser una curva, como la de la figura 3.28, concluiríamos diciendo de que la hipótesis es falsa. Pero ello no significa que no puede ser un polinomio; simplemente no ha sido de segundo orden, pero puede ser de otro orden. Luego lanzamos como hipótesis de que es una:

Figura 3.28 μ vs. x (curva) falso segundo orden



3.6.2. Función polinomial de tercer orden

La ecuación general que rige a este polinomio es:

$$Y = A + BX + CX^2 + DX^3$$

En donde D es otra constante arbitraria. Procedemos a comprobar esta nueva idea siguiendo un procedimiento similar al anterior:

$$Y - \mathrm{A} = (B + CX + DX^2)\mathrm{X}$$

$$\frac{Y - A}{X} = B + CX + DX^2 \qquad si\ \mu = \frac{Y - A}{X} \text{ tenemos:}$$

$$\mu = B + CX + DX^2$$

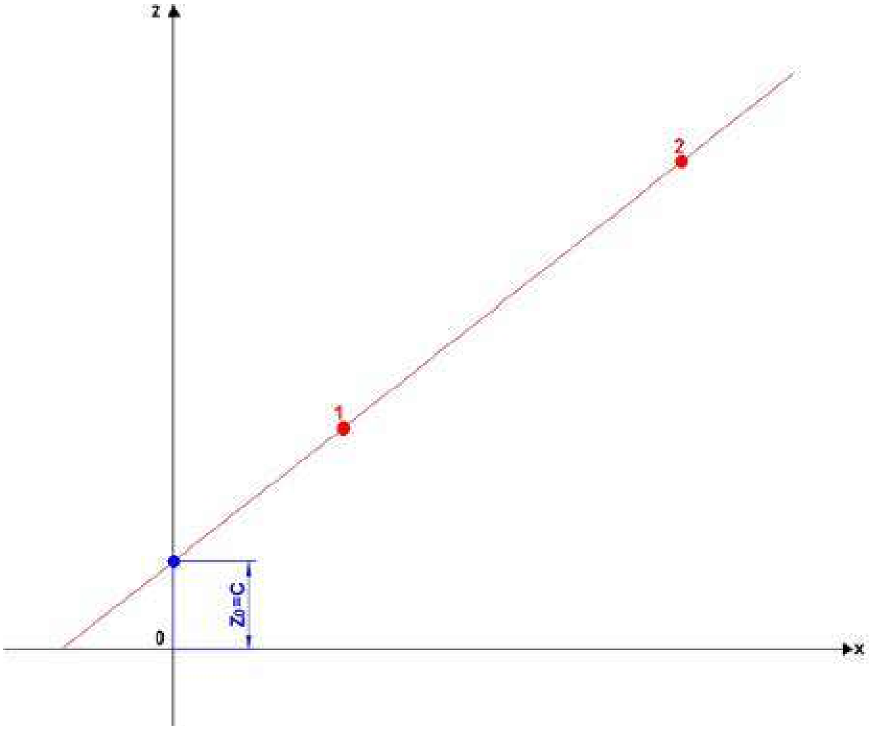
$$\mu - B = X(C + DX)$$

$$\frac{\mu - B}{X} = C + DX \qquad \text{si } Z = \frac{\mu - B}{X} \text{ nos queda:}$$

$$\mathrm{Z=C+DX}$$

La misma que corresponde a una ecuación lineal de Z= f(x); resultado que sugiere realizar una gráfica de Z vs. X para comprobar la hipótesis. Para realizar esta gráfica, se debe determinar previamente la constante B, la misma que teóricamente sería aquel valor que toma (μ_0 =B) cuando X=0; valor que debe leerse en la figura 3.28. Con este valor se procede a calcular los valores de Z=μ-B/X y realizar la gráfica de la figura 3.29. Si esta gráfica resulta ser una recta aproximada, entonces nuestra hipótesis seria correcta y procederíamos a determinar las otras constantes (C y D).

Figura 3.29 z *vs*. x (recta) verdadera función tercer orden



El valor de C sería aquel valor que toma Z cuando X=0, y el valor de D resulta ser la pendiente de la gráfica de la figura 3.29.

$$D = \frac{\Delta Z}{\Delta X} = \frac{Z_2 - Z_1}{X_2 - X_1}$$

Y reemplazando los valores de las constantes, en la ecuación polinomial de tercer orden general, obtendríamos la ecuación empírica particular para un caso específico.

Si la gráfica Z vs. X no es una recta, sino una curva, la hipótesis de tercer orden sería falsa. Pero esto no significa que no puede ser un polinomio, solo que puede ser de cuarto orden, o de cualquier otro orden. La comprobación se haría mediante un procedimiento similar al descrito para los dos casos.

Ejemplo 3.15

Al medir la carga (Q) en función del voltaje (Vab) en un diodo, se encontraron los siguientes resultados:

Vab (V)	0.0	1.5	2.0	2.5	3.0	-1.0	-2.0	-3.0
Q (μc)	12.0	-1.5	-18.0	-45.5	-87	21.0	56.0	147.0

Solución:

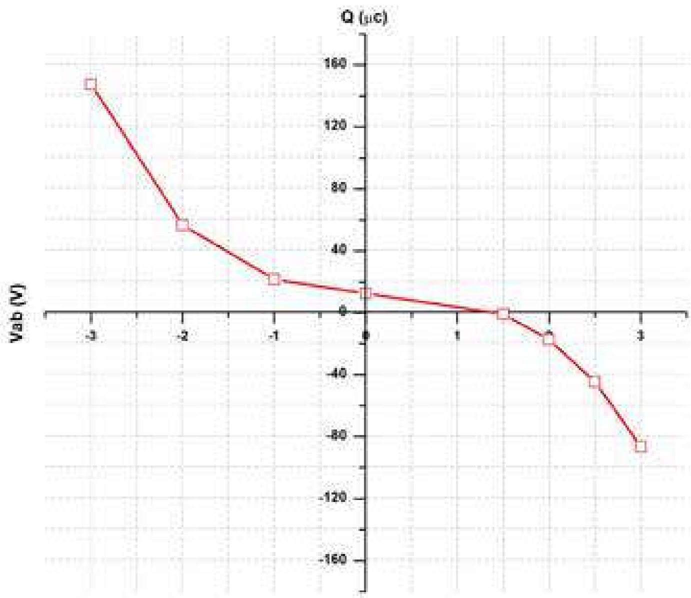
En primer lugar, realizamos la gráfica Q= f (Vab) (fig. 3.30).

ESCALAS:

V ab: 1 cm= 0.5 V

Q: 1 cm= 20 μc

Figura 3.30 Q *vs* .Vab (curva) polinomio



Como la gráfica es una curva, lanzamos como hipótesis que puede ser un polinomio de segundo orden de la forma general:

$$Q = A + B\ Vab + C\ Vab^2$$

La misma que la podríamos comprobar así:

$$Q - A = Vab\,(B + C\ Vab)$$

$$\frac{Q-A}{Vab} = B + C\,Vab \qquad \text{si} \qquad \mu = \frac{Q-A}{Vab} \qquad \text{tenemos:}$$

$$\mu = B + C\ Vab$$

Que es una ecuación lineal de μ= f (Vab). Luego hacemos la gráfica μ vs. Vab (fig. 3.31), hallando el valor de A y los valores de μ, el valor de A= Q_0=12 μc en la figura 3.30. Luego, los valores de μ serían los siguientes:

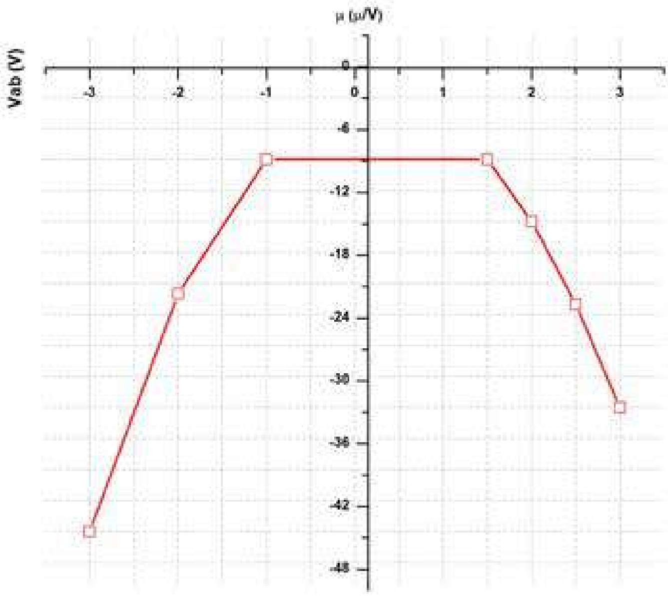
Vab (V)	0.0	1.5	2.0	2.5	3.0	-1.0	-2.0	-3.0
Q (μc)	12.0	-1.5	-18.0	-45.5	-87	21.0	56.0	147.0
$\mu = \frac{Q-A}{Vab}\left(\frac{\mu c}{V}\right)$	-	-9	-15	-23	-33	-9	-22	-45
$Z = \frac{\mu - B}{Vab}\left(\frac{\mu c}{V^2}\right)$	-	-4	-6	-8	-10	6	9.5	14

ESCALAS

μ: 1 cm= 3 μc/V

Vab: 1 cm= 0.5 V

Figura 3.31 μ *vs* Vab (curva) no de segundo orden



Como la gráfica μ *vs*. Vab (fig. 3.31) es una curva, la hipótesis no es correcta. Luego lanzamos como nueva hipótesis de que es una función polinomial de tercer orden, de la forma general:

$$Q = A + B\ Vab + CVab^2 + D\ Vab^3$$

La misma que podemos verificarla con un procedimiento similar:

$$Q - A = Vab\left(B + CVab + DVab^2\right)$$

$$\frac{Q-A}{Vab} = B + CVab + DVab^2 \qquad \text{si} \qquad \mu = \frac{Q-A}{Vab} \qquad \text{tenemos:}$$

$$\mu = B + CVab + DVab^2$$

$$\mu - B = Vab\left(C + DVab\right)$$

$$\frac{\mu - B}{Vab} = C + DVab \qquad si \qquad Z = \frac{\mu - B}{Vab} \qquad \text{nos queda:}$$

$$Z = C + DVab$$

Que es una ecuación lineal. Luego hacemos una gráfica Z vs. Vab (fig. 3.32). El valor de la constante B se puede leer en la figura 3.31. Es el valor que toma μ cuando: Vab = 0, si la curva no corta el eje (μ) prolongamos la curva siguiendo cuidadosamente la simetría y nos resulta que:

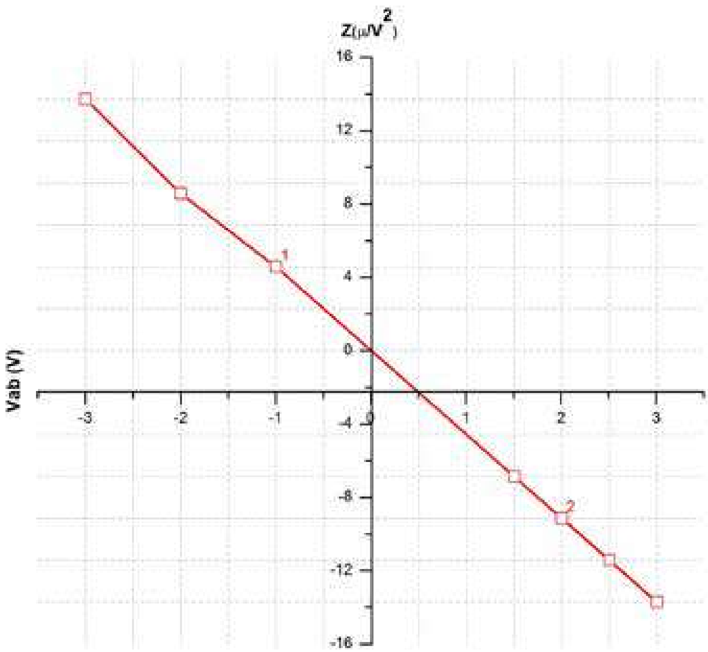
$$B = -3\mu c/V$$

ESCALAS:

Z: 1 cm = 2 μc/V

Vab: 1 cm = 0.5 V

Figura 3.32 Z *vs*. Vab (recta)



Como resulta una recta, hemos comprobado que la hipótesis de que es un polinomio de tercer orden es verdadera, luego procedemos a determinar las constantes C y D [11].

El valor de $C = Z_0$ cuando Vab = 0, en la figura 3.32.

$$C = 2\ \mu c/V$$

Y el valor de D, la pendiente de esta gráfica (fig. 3.32).

$$D = \frac{Z_2 - Z_1}{Vab_2 - Vab_1} = \frac{\left[(-6\text{-}6)\right]\frac{\mu c}{V^2}}{2\text{-}(-1)V} = \frac{-12}{3}$$

$$D = -4\,\frac{\mu c}{V^2}$$

Luego, la ecuación especifica será:

$Q = 12 - 3Vab + 2Vab^2 - 4Vab^3$ en donde cuando: $Vab\,(V) \Rightarrow Q = (\mu c)$

Para expresar la ecuación en el SI, expresamos las constantes en el SI, así:

$$A = 12\ \mu c \times \frac{10^{-6}}{\mu c} = 12 \times 10^{-6} \mu c$$

$$B = -3\ \frac{\mu c}{V\mu} \times \frac{10^{-6}\ C}{cV} = -3\ \times 10^{-6}\frac{C}{}$$

$$C = 2\ \frac{\mu c}{V^2} \times \frac{10^{-6}\ C}{\mu c} = 2\ \times 10^{-6}\frac{C}{V^2}$$

$$D = -4\ \frac{\mu c}{V^3} \times \frac{10^{-6}\ C}{\mu c} = -4\ \times 10^{-6}\frac{C}{V^3}$$

$$Q = 12 \times 10^{-6} - 3 \times 10^{-6}\,Vab + 2 \times 10^{-6}\,Vab^2 - 4 \times 10^{-6}\,Vab^3$$

En donde cuando Ec. en el SI.

CAPÍTULO IV.
EJERCICIOS PROPUESTOS DE GRÁFICAS Y FUNCIONES

Se presentan los siguientes ejercicios propuestos [11].

1. Escribir las siguientes expresiones en forma exponencial:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $1/(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$

c) $\sqrt[3]{f/g \times f/g \times f/g \times f/g}$

2. Escribir los resultados de las siguientes operaciones en forma exponencial simplificada:

a) $2^{5}.2^{-3}.2^{6}$

b) $5^{2}.5^{6}.5^{-6}$

c) $(4p)\,(4p)^{3}\,(4p)^{-4}$

d) $4^{3}/4^{-2}$

e) Mr^{4}/Mr^{2}

f) $H^{5/2}/\sqrt{H}$

g) (24.26) / (23.2-5)

h) h1/2.h3/2

3. Encontrar la raíz principal de:

a) raíz cúbica de -27

b) raíz cúbica de -64

c) raíz cuarta de 81

4. Transformar cada una de las siguientes expresiones a la forma de radical o fraccionaria y a la forma potencial.

a) $3^{2/5}$

b) $3^{1/2}\, p^{1/2}\, d^{-1/2}$

c) $I^{1/2}\, L^{-1/2}$

d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{125}$

f) $p^{1.69}/p$

g) $\sqrt[5]{5^3}$

h) $\sqrt[3]{18}$

i) $4^{1/3}$

j) $\sqrt[5]{b^2}$

5. En la ecuación: I=E/ R que sucede al valor de I si:

a) solo E se triplica

b) solo E se reduce a la mitad

c) solo R se divide por 3

d) solo R se multiplica por 5

e) solo E se duplica y R se divide por 4

6. La lectura del voltímetro V, cambia con la corriente I en un circuito, como se muestra en la tabla siguiente:

I (A)	0	0.100	0.195	0.290	0.390	0.485
V (V)	0	20	40	60	80	100

a) Determine la ecuación empírica a través de una gráfica con estos datos.

b) De acuerdo con el valor y unidades de la pendiente (o constante de proporcionalidad). ¿Qué significado físico tiene esta constante?

c) ¿Qué ley general hemos estado comprobando?

7. La densidad del metano (d) a 0°C, fue determinada para varias presiones (P). Los datos se dan en la tabla siguiente: cm = centímetro de mercurio; g/l = gramo por litro.

P (cm Hg.)	19	38	57	76
D (g/l)	0.18	0.36	0.54	0.72

a) Construir la gráfica con los datos.

b) ¿Qué conclusiones se pueden sacar acerca de la relación entre las variables, ya sea analizando los datos y/o la gráfica Q?

c) Determine la ecuación empírica de la gráfica y exprésela en el SI.

d) Utilizar la ecuación para calcular el valor de la densidad del metano a una presión de 45 cm Hg. Confrontar el valor calculando con el leído en la gráfica.

e) Utilizar la ecuación para calcular el valor de la presión para una densidad de 0.63 g/l. Confrontar el cálculo con el valor leído en la gráfica.

8. En un tubo cerrado que contiene aire, se forzó aceite. La altura H de la columna de aire, varía con la presión P como se muestra en la tabla siguiente:

P (lb/pul^2)	67	8.1	10.2	12.9	14.4	17.6	21 .4	25.1	29.4
H (pul)	13.3	10.7	9.2	7.1	6.3	5.1	4.1	3.5	3.0

a) Construir una gráfica de H y P con estos datos.

b) ¿Qué conclusiones pueden obtenerse de la gráfica?

c) Linealice la gráfica anterior.

d) A partir de la gráfica lineal, determine la ecuación empírica específica en el SI.

9. El período T de un resorte que oscila varía con la masa (M) fija a uno de sus extremos. Los datos experimentales se reproducen en la tabla siguiente:

M (kg)	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
T (s)	0	0.65	0.90	1.12	1.30	1.45

a) Realice una gráfica de T en función de M.

b) ¿Qué tipo de proporción le sugiere la gráfica?

c) Linealice la gráfica anterior.

d) Determine la relación funcional entre T y M. Pruebe la validez de la ecuación por sustitución de uno de los puntos.

e) Encontrar gráficamente la masa que produciría un período de 1.0 s.

f) Encontrar gráficamente el período para una masa de 0.56 kg.

10. Dada la ecuación T = 630 000 / N ¿Qué cantidades deben plantearse sobre los ejes para que den una gráfica recta?

a) ¿Cuál sería el valor numérico de la pendiente de la gráfica lineal?

b) ¿Qué relación existe entre T y N?

11. Dada la ecuación $P = 3.2\ (107)\ t^3$, ¿qué cantidades deben representarse sobre los ejes para que den una gráfica recta?

a) ¿Cuál sería el valor numérico de la pendiente de la gráfica lineal?

b) ¿Cuál es la relación funcional entre P y t.

12. La aceleración (a) varía con el tiempo (t) como se indica en la tabla siguiente:

T (s)	29.9	20.0	16.0	13.7	12.3	11.1	10.1
A (cm/s)	0.38	0.85	1.32	1.81	2.25	2.86	3.34

a) Realice una gráfica a x t.

b) ¿Qué conclusiones puede sacar de la gráfica?

c) Linealice la gráfica.

d) Determine la ecuación que relaciona a y t. Probarla por sustitución de uno de los puntos dados. Exprésela también en el SI .

13. Al medir la posición X en función del tiempo t en el frenado de una partícula se encontraron los siguientes resultados experimentales:

X (m)	2000	353.6	128.6	62.5	35.8	22.7
T (s)	1	2	3	4	5	6

a) De acuerdo con el análisis de los datos, ¿qué tipo de función general cree usted que será?

b) ¿Qué puede relacionar a X en función de t?

c) Realice una gráfica de X en función de t. ¿De acuerdo con la forma de la gráfica, ha comprobado usted su hipótesis?

d) Encuentre la ecuación empírica específica que relaciona a X y t, por el método que más le convenga. No olvide expresar las unidades de la constante de proporcionalidad.

14. Al aplicar la fuerza (F) a un cuerpo elástico se midió la elongación (x) que se producía en este. Se encontraron los siguientes resultados experimentales:

F (N)	0.05	1.4	9.8	38.8	113.2	271.7	569.4
X (cm)	1	2	3	4	5	6	7

a) Encuentre la ecuación empírica específica que relaciona F en función de k por el método que más le convenga.

b) Exprese esta ecuación en SI.

15. Al medir la presión atmosférica (P) en función de la altura (h) en un planeta, se encontraron los siguientes resultados:

P (mm Hg)	270	462	524	600	669	886
H (km)	1.0	2.5	3.1	3.9	4.7	7.6

a) Determine la ecuación empírica específica que relaciona P en función de h por el método más conveniente.

b) Exprese esta ecuación en el SI.

16. Al medir la presión (P) y el volumen de un cierto gas en un proceso isotérmico se obtuvieron estos datos:

P (Pa)	15 574	9587	7218	5901	4443	3107
V (m^3)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.1

a) Determine la ecuación empírica específica que relaciona a P con V.

17. Al medir la energía radiactiva (R) en función de la temperatura (T) de un cuerpo altamente radiactivo se encontraron los siguientes resultados:

R (J)	0.002	0.63	2.00	6.32	20.0	63.2	200.0
T (°C)	0.0	0.10	0.12	O.14	0.16	0.18	0.20

a) Realice una gráfica de R en función de T.

b) De acuerdo con las características de la gráfica anterior, ¿puede usted lanzar una hipótesis respecto a qué tipo de función general podría relacionar estas variables?

c) Ahora compruebe su hipótesis determinando la ecuación específica. Utilice el método más conveniente. Si es una ecuación exponencial, exprésela en base 10 y en base e. Y, aplicando estas ecuaciones, calcule R para T = 0.22 °C y para 0.15 °C y compruebe que con ambas ecuaciones obtiene el mismo resultado.

18. Al medir dos variables que intervienen en un evento científico, se encontraron los siguientes resultados:

Y	300	160.6	86.0	46.0	24.6	13.1
X	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25

a) Determine la ecuación específica que existe entre Y y X por el método que más le convenga.

19. Al medir el espacio (X) en función del tiempo (T) en un movimiento se determinaron los siguientes resultados:

X (pie)	$5x10^{-3}$	$19.8x10^{-3}$	$32.7x10^{-3}$	$40x10^{-3}$	$559x10^{-3}$
T (s)	1.0	2.5	3.5	4.0	5.0

a) Encuentre la relación específica empírica que existe entre X y t en el SI.

b) Indique unidades para X y t, como también las unidades de la constante que relaciona a estas magnitudes.

20. Al medir el período (T) en función del momento de inercia (I) de un cuerpo elástico, se encontraron los siguientes resultados:

T (s)	56.7	64.2	72.7	824	93.4
L (kg m²)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25

a) Encuentre la relación empírica específica que existe entre T en función de I en el SI.

b) Indique unidades de constantes y variables.

c) Si es función exponencial, exprese las relaciones en base 10 y e

21. En una práctica de un condensador en el vacío, se midió la carga (Q) y el voltaje (Vab). Determinándose los siguientes resultados:

Q (UC)	284.6	67.5	16.0	3.8	1.6
Vab (V)	0.25	0.5	0.75	1.0	1.15

a) Determine la relación empírica específica que existe entre Q y Vab en unidades del SI.

b) Si es función exponencial, exprese las relaciones en base 10 y e.

22. En un experimento, al medir la altura (h) en función del tiempo (t), se obtuvieron los siguientes resultados:

t (s)	1.0	2.0	3.0	3.5	4.0	5.0
h (pie)	10.0	21.0	38.0	48.75	61.0	90.0

a) Determine la ecuación especifica entre estas magnitudes en el SI.

b) Cuál sería el significado físico de las constantes de esta ecuación.

c) Cuál sería la ley general que existe para este caso.

23. Al medir la energía (E) en función de la temperatura (T) se obtuvieron los siguientes resultados:

E (J)	6.0	8.0	22.0	54.0	10.0	8.0	12.0	-2.0
T (K)	0.0	1.0	2.0	3.0	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0

a) Determine la relación que hay entre magnitudes en el SI.

24. En una práctica de laboratorio, al medir el momento de inercia (I) en función de la longitud (L), se obtuvieron los siguientes resultados:

L (cm)	0.0	10.0	15.0	20.0	-5.0	-10	-15.0
I (g/cm²)	-4.0	-299.0	-686.5	-1234	-96.5	-349	761.5

a) Haga una gráfica de I en función de L.

b) De acuerdo con la gráfica, ¿cuál puede ser la función o ecuación general que existe entre estas magnitudes?

c) Linealice la gráfica en papel milimetrado.

d) Determine la ecuación específica en el SI.

25. Al medir la carga (Q) en función del voltaje (Vab), se obtuvieron los siguientes resultados:

Vab (V)	0.0	1.5	2.0	2.5	3.0	-1.0	-2.0	-3.0
Q (C)	12.0	-1.5	-18.0	-45.5	-87	21.0	56.0	147.0

a) Determine la ecuación específica que existe entre estas variables en el SI.

CAPÍTULO V.
MAGNITUDES VECTORIALES

5.1. CLASIFICACIÓN DE MAGNITUDES POR LA DEFINICIÓN

A las «magnitudes», que son las componentes fundamentales de las funciones o relaciones que expresan las leyes de los fenómenos físicos o eventos científicos, se las clasifica ahora desde el punto de vista de cómo queda definida una magnitud, desde este enfoque, las magnitudes se clasifican en: escalares y vectoriales.

5.2. MAGNITUDES ESCALARES

Son aquellas que se definen expresando únicamente «la medida» de la magnitud, que también se llama módulo, el mismo que se indica a través de «un número real» acompañado de la unidad de medida. Por ejemplo:

5.2.1. Longitud

Puede expresarse como 12 cm, 25 m, 250 km, y no es necesario indicar nada más, para que quede definida la longitud, o sea, esta es una magnitud escalar.

5.2.2. Masa

La masa de un objeto es 200 kg, 5000 g, 2 lb, y de esta manera queda definida la masa. Luego, es una magnitud escalar.

5.2.3. Tiempo

El tiempo puede ser 10 h 17 min 5 s. Luego, el tiempo también es una magnitud escalar. La mayoría de las magnitudes que se utilizan en ciencia son ESCALARES, porque se definen midiendo el módulo en una escala.

Pero existen magnitudes que no quedan definidas indicando únicamente el módulo (o medida) de la magnitud como, por ejemplo:

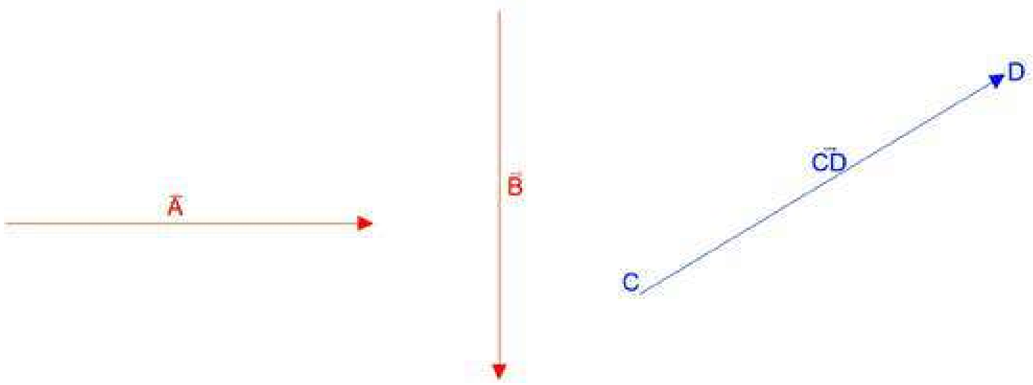
5.3. MAGNITUDES VECTORIALES

Si le pedimos a usted que se desplace 10 metros, ¿lo podría hacer? Usted diría que ¡no! porque no le han indicado la dirección, ni el sentido (¿hacia dónde?). Entonces, esta magnitud no queda definida indicando solo el MÓDULO; ella requiere, para definirse, dos elementos más, que son la DIRECCIÓN y el SENTIDO. A las magnitudes que se definen señalando módulo, dirección y sentido se las denomina «MAGNITUDES VECTORIALES» o, geométricamente, simplemente vectores.

5.3.1. Representación gráfica de vectores

Un vector se puede representar en forma gráfica por medio de un segmento de recta dirigido (por definición, tiene dirección). El módulo representa la longitud del segmento que debe ser proporcional al módulo y el sentido por la saeta dibujada en uno de los extremos del segmento.

Figura 5.1 Representación gráfica vectores



A los vectores se les suele representar con letras mayúsculas o minúsculas, colocando una flecha sobre la letra para indicar que se trata de un vector. Se puede utilizar una sola letra, pero también dos letras; si se hace de esta forma, la primera letra debe representar el origen y la segunda, el extremo del vector. Al módulo del vector se suele representarlo del modo siguiente:

$$\text{Módulo} \rightarrow A \rightarrow \left|\vec{A}\right|$$

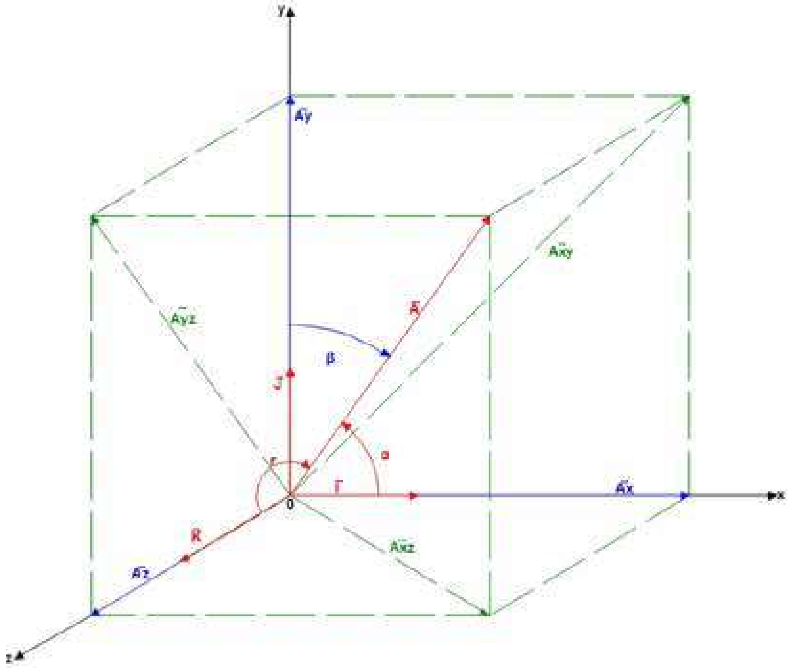
Cualquiera de las dos formas [5].

5.3.2. Mecánica de proyecciones

A un vector representado en forma gráfica, se lo puede descomponer en sus componentes rectangulares (o proyecciones), como también si se trata de un vector en el espacio, se podría determinar sus proyecciones en los planos correspondientes a un SISTEMA TRIDIMENSIONAL. Estos planos son: «xz» (plano del piso o plano horizontal), «yz» (un plano lateral) y «xy» (el plano frontal), como se muestra en la figura 5.2.

5.3.3. Sistema tridimensional

Figura 5.2 Mecánica de proyecciones



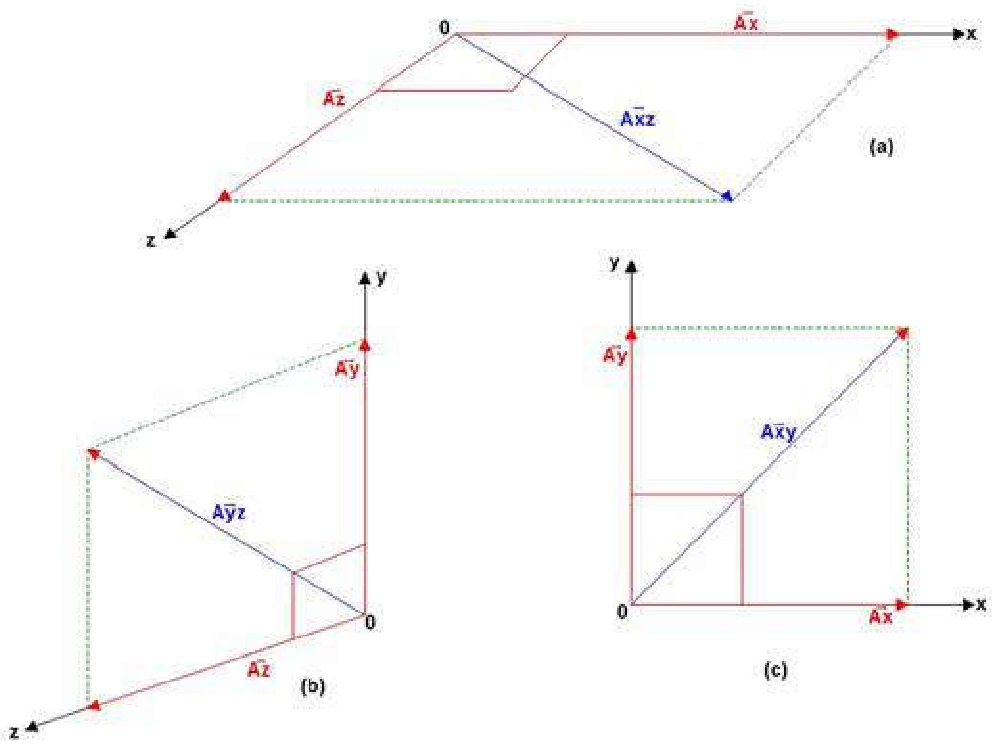
Como notamos, hemos obtenido seis proyecciones en los tres ejes , y tres proyecciones en los tres planos.

Plano Xz: Plano horizontal: $\vec{A}xz$, fig. 5.3 (a)

Plano Yz: Plano lateral: $\vec{A}yz$, fig. 5.3 (b)

Plano Xy: Plano frontal: $\vec{A}xy$, fig. 5.3 (c)

Figura 5.3 Proyecciones en planos



Las proyecciones, sean en ejes o en planos, las podemos utilizar para expresar un vector, debido a que cualquier vector es la suma vectorial de sus componentes rectangulares. Así tenemos que:

$$\vec{A} = \vec{A}x + \vec{A}y + \vec{A}z \quad (5.1)$$

$$\vec{A} = \vec{A}xz + \vec{A}y \quad (5.2)$$

$$\vec{A} = \vec{A}yz + \vec{A}x \quad (5.3)$$

$$\vec{A} = \vec{A}xy + \vec{A}z \quad (5.4)$$

$$\vec{A}xz = \vec{A}x + \vec{A}z \quad (5.5)$$

$$\vec{A}yz = \vec{A}y + \vec{A}z \quad (5.6)$$

$$\vec{A}xy = \vec{A}x + \vec{A}y \quad (5.7)$$

El vector en el espacio $\vec{A}$ lo podemos expresar como la suma vectorial de sus componentes rectangulares (ecuación (5.1)).

El vector en el espacio también se puede expresar como la suma vectorial de una proyección en uno de los planos más la proyección en uno de los ejes respectivos (ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4)).

Las proyecciones vectoriales en los planos, también se pueden expresar en función de la suma vectorial de sus componentes rectangulares (ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7)).

5.4. FORMAS ANALÍTICAS DE REPRESENTAR VECTORES

5.4.1. En función de coordenadas rectangulares

En esta forma, se los puede representar a través de un conjunto ordenado de tres elementos, así:

$$\vec{A} = \left(Ax, Ay, Az\right) \qquad (5.8)$$

Ax = coordenada en el eje horizontal x.

Ay = coordenada en el eje vertical y.

Az = coordenada en el eje frontal z.

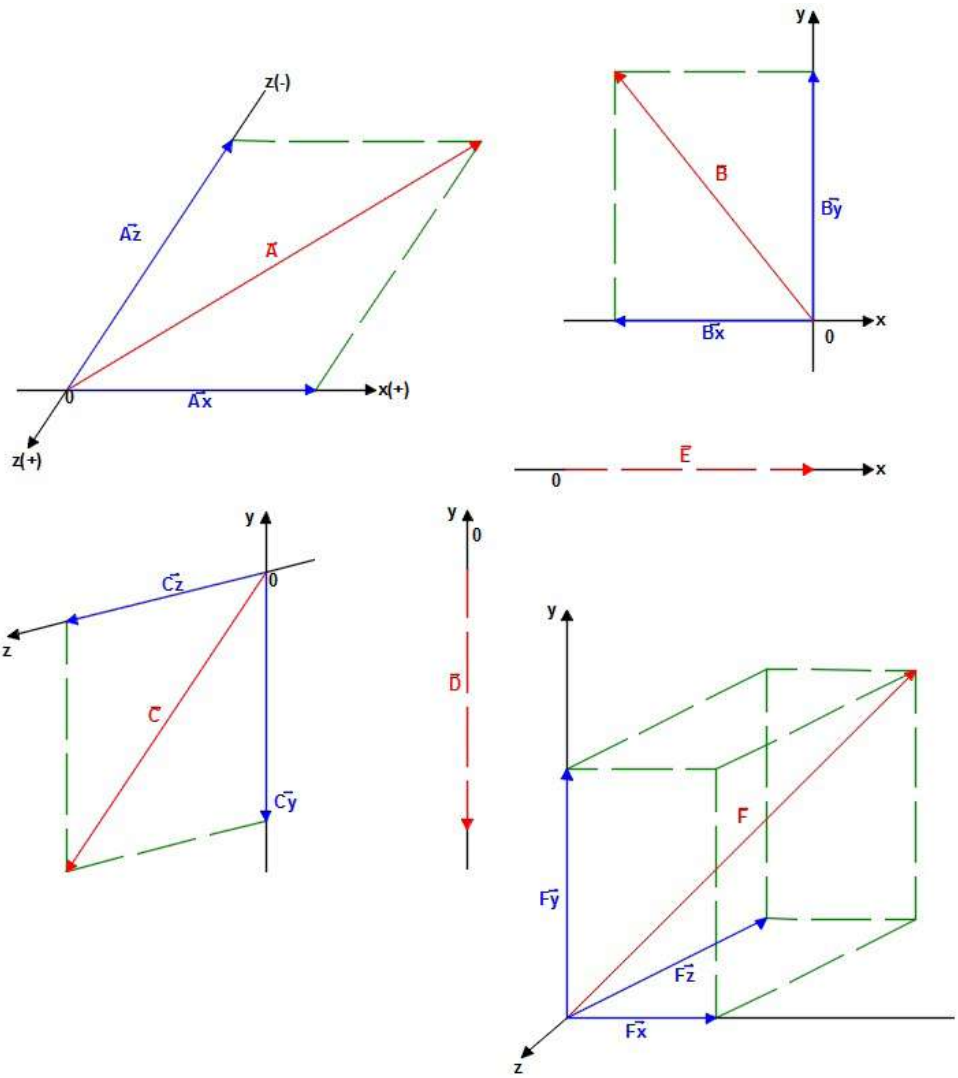
En esta forma, se puede expresar cualquier vector, sea que se encuentre en un eje, o en un plano, o en el espacio.

Ejemplos:

$$\vec{A} = \left(5,0,-6\right)\text{m} \qquad \vec{D} = \left(0,-3,0\right)\text{m}$$
$$\vec{B} = \left(-3,4,0\right)\text{m} \qquad \vec{E} = \left(5,0,0\right)\text{m}$$
$$\vec{C} = \left(0,-6,4\right)\text{m} \qquad \vec{F} = \left(2,4,-5\right)\text{m}$$

Todos estos ejemplos se pueden también representar en forma gráfica estimativa. Así, tenemos:

Figura 5.4 Representación gráfica a partir de coordenadas rectangulares



5.4.2. En función de coordenadas polares

Esta forma de representar vectores se utiliza para vectores en un plano o en los ejes, pero no es posible para expresar vectores en el espacio. La forma analítica es la siguiente:

$$\vec{A} = (A, \sphericalangle \phi \text{ con un eje}) \qquad (5.9)$$

En este caso $\vec{A}$ es el vector para representar que debe estar en un plano, al mismo que habría que identificarlo con subíndices (xy, xz o yz). →

A= módulo del vector

∅ = un ángulo que indica la dirección y sentido, pero que se debe especificar con un subíndice con qué eje se forma en el plano especificado

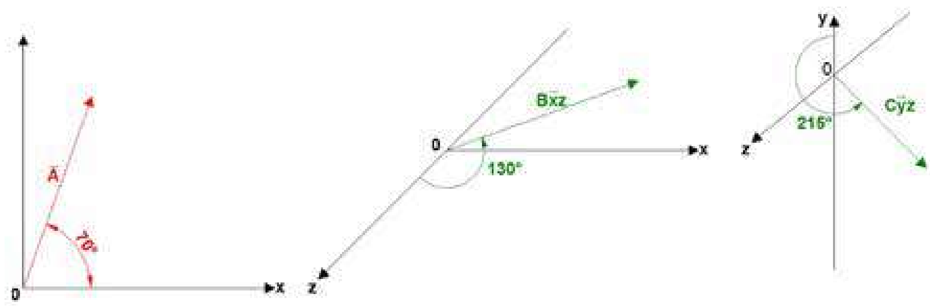
Considerando que la convención de signos para medir ángulos en un plano es la siguiente: si el ángulo es positivo (+) se considera el ángulo medido desde el eje indicado (EJE POLAR) en sentido antihorario, y si es negativo (-) se mide en sentido horario.

Ejemplos:

$$\vec{A}xy = (10 \text{ km}; 70° \text{con x}) \quad \vec{B}xz = (12 \text{ km}, 130° \text{ con z}) \quad \vec{C}yz = (8 \text{km}, 215° \text{ con y})$$

A estos vectores expresados en forma analítica en coordenadas polares, los podríamos graficar estimadamente para completar su representación.

Figura 5.5 Coordenadas polares



5.4.3. En función de coordenadas geográficas

Las coordenadas geográficas que se utilizan como referencia para representar la dirección y sentido de un vector saon los puntos cardinales de la Tierra: Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (O). Estos puntos cardinales nos sirven en la realidad para dirigirnos en el plano horizontal (de la Tierra). Luego, estas coordenadas las utilizaremos únicamente para vectores que se encuentren en el plano horizontal (xz).

Con las siguientes referencias:

Z (+) → SUR (S); Z (-) → NORTE (N)

X (+) → ESTE (E); X(-) → OESTE (O)

Representación analítica:

$$\vec{A} = \left(A; \sphericalangle \text{orientación}\right) \qquad (5.10)$$

$\vec{A}$ = vector que está localizado en el plano xz

A = módulo del vector

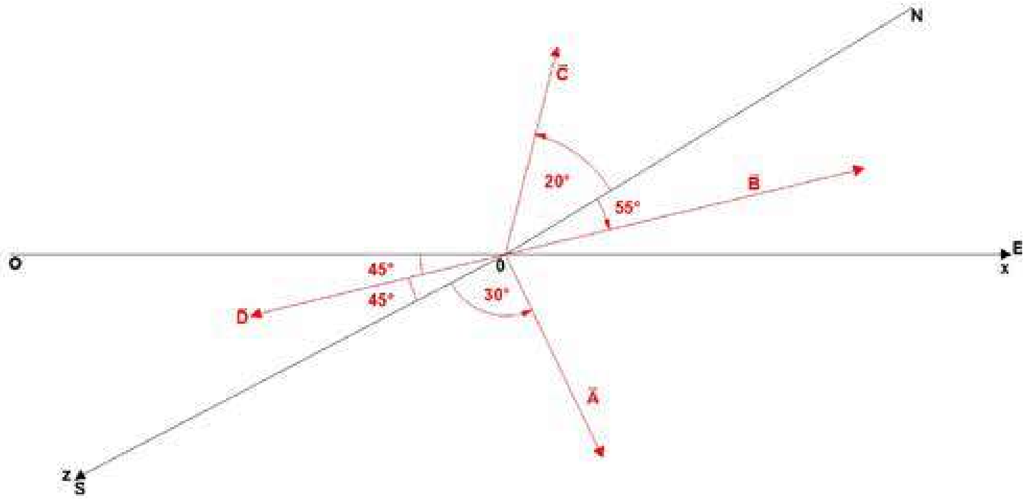
S = Orientación = Ángulo que indica la dirección y sentido en el plano xz.

Ejemplo:

$$\vec{A} = \left(10\,\text{m/s} \,;\, \text{S}30°\text{E}\right) \qquad \vec{B} = \left(8\,\text{m/s} \,;\, \text{N}55°\text{E}\right)$$
$$\vec{C} = \left(12\,\text{m/s} \,;\, \text{N}20°\text{O}\right) \qquad \vec{D} = \left(9\,\text{m/s} \,;\text{SO}\right)$$

A estos vectores, los podemos representar estimativamente en forma gráfica (fig. 5.6).

Figura 5.6 Coordenadas geográficas



5.5. EN FUNCIÓN DEL MÓDULO POR EL UNITARIO

5.5.1. Vector unitario

Es un vector cuyo módulo es igual a la unidad.

VECTOR UNITARIO $(\vec{\mu}A)$ DE UN VECTOR $(\vec{A})$

Al vector unitario de un vector se define como el vector sobre su módulo, así:

$$(\vec{\mu}A) = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (5.11)$$

El vector unitario de $(\vec{\mu}A)$ tiene igual dirección y sentido del vector $\vec{A}$, por ende, un vector unitario define analíticamente, la dirección y sentido del vector.

De la ecuación (5.11) podemos escribir:

$$\vec{A} = A \cdot (\vec{\mu}A)$$

La ecuación (5.11) define un vector en función del módulo (A) y el unitario indica dirección y sentido.

5.6. EN FUNCIÓN DE VECTORES BASE

5.6.1. Vectores unitarios normalizados σ

Vectores base	Módulo	Dirección	Sentido
$\vec{i} = \vec{\mu}_{AX}$	$\lvert\vec{i}\rvert = 1$	$Eje\,X$	$+X$
$\vec{J} = \vec{\mu}_{AY}$	$\lvert\vec{J}\rvert = 1$	$Eje\,Y$	$+Y$
$\vec{K} = \vec{\mu}_{AZ}$	$\lvert\vec{K}\rvert = 1$	$Eje\,Z$	$+Z$

Los vectores base como se muestran en la figura 5.2. Se los utiliza para expresar las coordenadas rectangulares en forma vectorial, así:

$$\vec{i} = \vec{\mu}_{Ax} = \frac{\vec{A}x}{Ax} \Rightarrow \vec{A}x = Ax\vec{i}$$

$$\vec{J} = \vec{\mu}_{Ay} = \frac{\vec{A}y}{Ay} \Rightarrow \vec{A}y = Ay\vec{J}$$

$$\vec{K} = \vec{\mu}_{Az} = \frac{\vec{A}z}{Az} \Rightarrow \vec{A}z = Az\vec{K}$$

Ec. (5.1) $\vec{A} = \vec{A}x + \vec{A}y + \vec{A}z$

Se la podría expresar también así:

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K} \qquad (5.12)$$

La ecuación (5.12) expresa el vector en función de vectores base ($\vec{i}$, $\vec{J}$ y $\vec{K}$) que es una de las mejores formas de hacerlo, debido a que facilita el desarrollo de las operaciones con vectores.

Y para expresar un vector en esta forma, previamente debemos obtener las coordenadas rectangulares (Ax, Ay, Az) y luego pasarlas a la forma de la ecuación (5.12).

Al vector unitario definido por la ecuación 5.11., también se lo debe expresar en función de vectores base. Reemplazando la ecuación (5.12) en la (5.11), tendríamos:

$$\vec{\mu}A = \frac{\vec{A}xi + \vec{A}yJ + \vec{A}zK}{A} = \frac{Ax}{A}\vec{i} + \frac{Ay}{A}\vec{J} + \frac{Az}{A}\vec{K}$$

Los coeficientes x, y, z, de esta relación expresan los cosenos de los ángulos directores (α, β, γ).

De acuerdo con la Fig. 5.2.

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{A}\ ;\ \cos\beta = \frac{Ay}{A};\ \ \cos\gamma = \frac{Az}{A}$$

Utilizando estas relaciones el vector unitario será:

$$\vec{\mu}A = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{J} + \cos\gamma\vec{K} \quad (5.13)$$

5.6.2. Ángulos directores

Otra forma de indicar analíticamente la dirección y el sentido de un vector es por medio de los ángulos directores (α, β, γ) (ver Fig. 5.2).

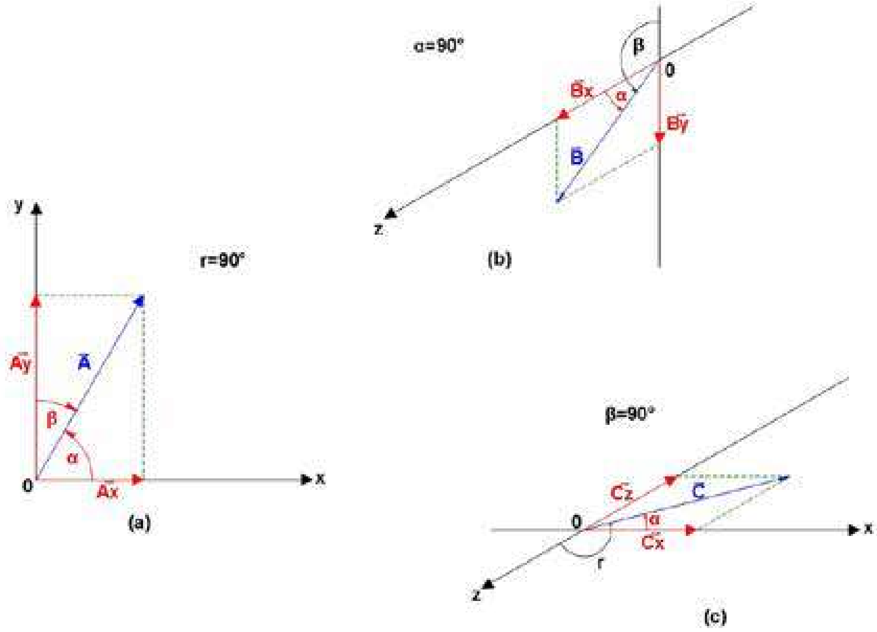
ALFA (α) es el ángulo comprendido entre el eje positivo de las “X” y una dirección cualquiera (que puede ser la de un vector) que este entre 0° y 180°.

BETA (β) es el ángulo comprendido entre el eje positivo de las “Y” y una dirección cualquiera (que puede ser la de un vector) que este entre 0° y 180°.

GAMMA (γ) es el ángulo comprendido entre el eje positivo de las “Z” y una dirección cualquiera (que puede ser la de un vector) que este entre 0° y 180°.

Ejemplos:

Figura 5.7 Ángulos directores



Según la figura 5.7 (a)

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{A}$$

$$\cos\beta = \frac{Ay}{A}$$

$$\cos\gamma = \frac{Az}{A}$$

De donde:

$$\left.\begin{aligned} Ax &= A\cos\alpha \\ Ay &= A\cos\beta \\ Az &= A\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Las relaciones indicadas en la ecuación 5.14 se utilizan para determinar, en forma analítica, coordenadas rectangulares en función de los ángulos directores (α, β, γ) para cualquier vector. Para los casos de la figura 5.7 (b) y (c) las relaciones correspondientes para obtener las coordenadas rectangulares serían:

$$Bx = B\cos\alpha \qquad Cx = C\cos\alpha$$
$$By = B\cos\beta \qquad Cy = C\cos\beta$$
$$Bz = B\cos\gamma \qquad Cz = C\cos\gamma$$

5.6.3. En función del módulo y sus ángulos directores

Esta forma no tiene limitaciones porque se la puede utilizar para vectores en ejes planos o en el espacio:

$$A = \left(A, \alpha, \beta, \gamma\right) \qquad (5.15)$$

Y los ángulos directores, se los puede obtener también de los coeficientes en $\vec{i}$, $\vec{J}$ y $\vec{K}$ de la ecuación (5.13) que expresa el vector unitario en vectores base, cuyos coeficientes representan los cosenos de los ángulos directores respectivamente.

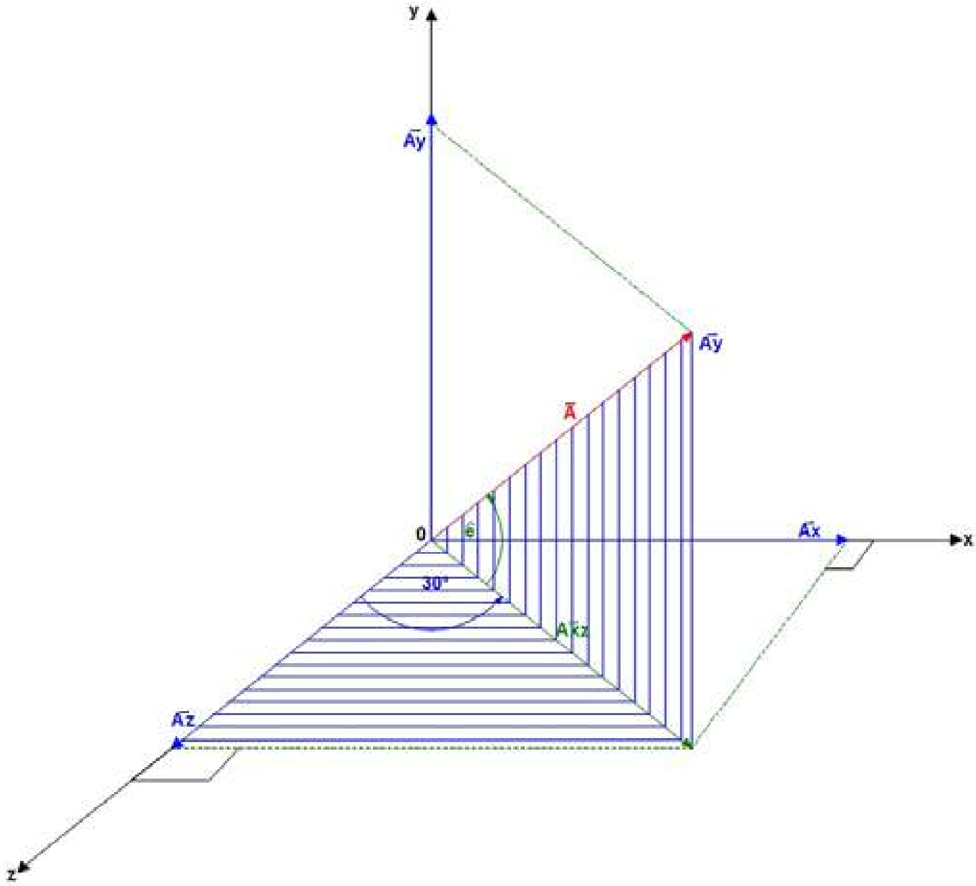
5.7. REPRESENTACIÓN DE VECTORES EN EL ESPACIO

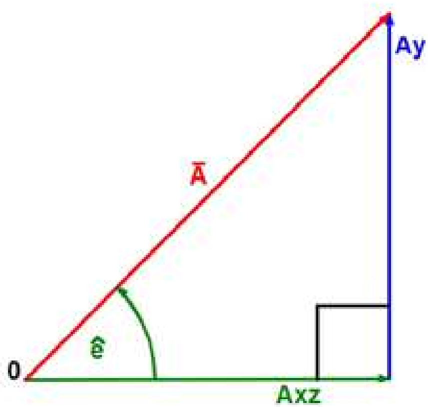
5.7.1. En función del módulo y ángulo de elevación (ê) o depresión ($\hat{d}$) y un ángulo de orientación.

$$\mathrm{A} = \left(\mathrm{A};\ \hat{e}\ \text{ o }\ \hat{d}\ ; \sphericalangle \text{ de orientación}\right) \qquad (5.16)$$

El ángulo de orientación ubicado en el plano X Z nos indica la dirección de la proyección del vector en el espacio en este plano horizontal, localizada esta dirección, se mide el otro ángulo, si es de elevación (ê) hacia arriba de plano horizontal (X, Z), y si es de depresión ($\hat{d}$)por debajo del plano horizontal (X,Y) como se indica en la siguiente figura 5.8.

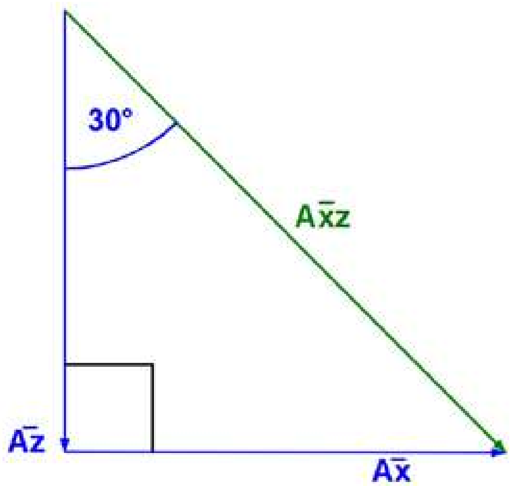
Figura 5.8 Vectores espacio





$$\operatorname{sen}\hat{e} = \frac{Ay}{A} \Rightarrow Ay = A\operatorname{sen}\hat{e}$$

$$\cos\hat{e} = \frac{Axz}{A} \Rightarrow Axz = A\cos\hat{e}$$



$$\operatorname{sen}30° = \frac{Ax}{Axz} \Rightarrow Ax = Axz \quad \operatorname{sen}30°$$

$$\cos 30° = \frac{Az}{Axz} \Rightarrow \mathrm{Ax} = \mathrm{Axz}\ \cos 30°$$

En conclusión:

$$\left.\begin{aligned} Ay &= A \ \operatorname{sen}\hat{e} \\ Axz &= A \ \cos\hat{e} \\ Ax &= Axz \ \operatorname{sen}30° \\ Az &= Axz \ \cos 20° \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Las relaciones (2.17) nos permiten determinar analíticamente las coordenadas rectangulares (Ax,Ay,Az)y los signos de las mismas depende en el cual de los octantes se encuentre posicionado el vector, en el caso del ejemplo está en el primer octante, por ende todas las coordenadas (Ax, Ay, Az)son positivas.

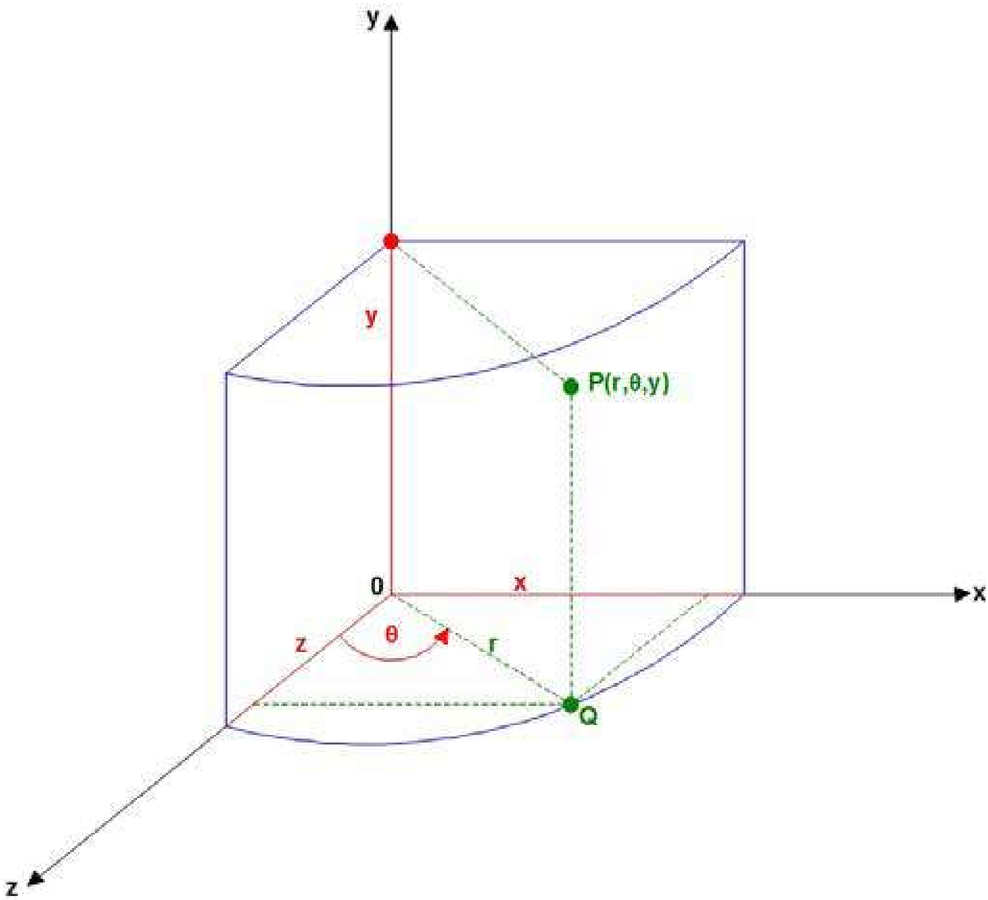
5.7.2. En función de coordenadas cilíndricas

En la Fig 5.9 se ha representado en el primer octante x, y, z un octavo de cilindro. Para que las coordenadas cilíndricas (r, θ, y) representen un punto único en el espacio, restringimos sus valores de r y θ en los intervalos:

$$r \geq 0;\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

"y" puede tomar cualquier valor real.

Figura 5.9 Coordenadas Cilíndricas



2.7.3. En función de coordenadas esféricas

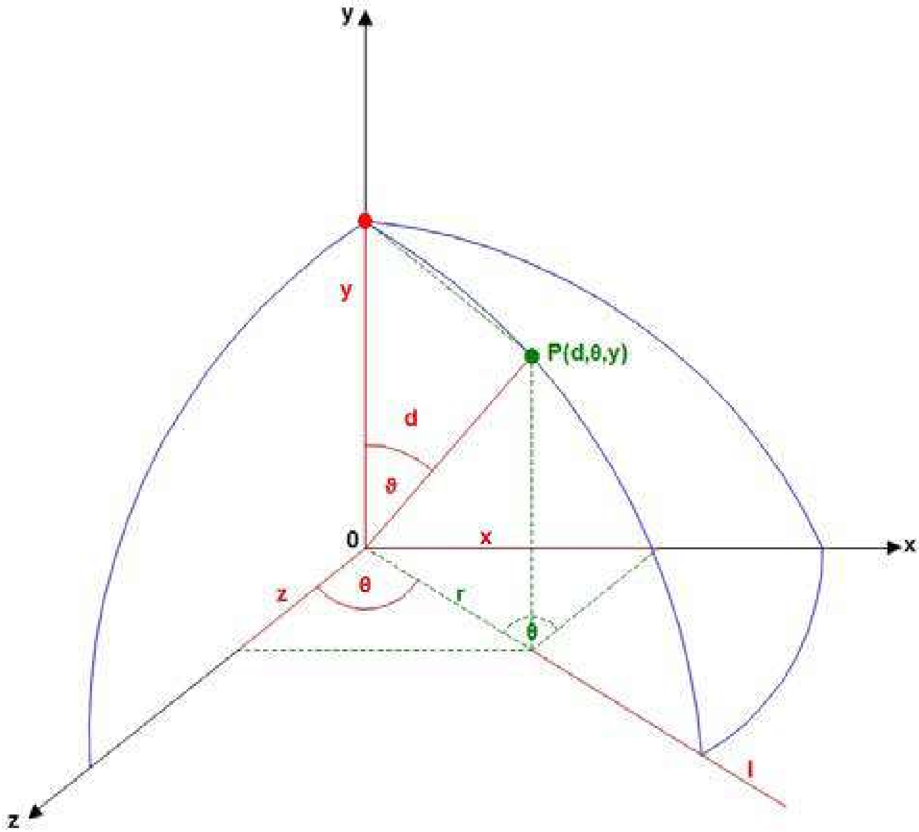
En la figura 5.10, se ha representado en el primer octante un octavo de esfera visto en corte. El punto P representa un punto en la esfera externa y, si consideramos este punto como el extremo del vector que nace en el origen del sistema tridimensional y que coincide con el centro de la esfera, para que las coordenadas esféricas del punto P (d, θ, φ) representen un punto único en el espacio tridimensional, restringimos sus valores a:

$r \geq 0$

$0 \leq \varphi < \pi$

$0 \leq \theta < 2\pi$

Figura 5.10 Coordenadas esféricas

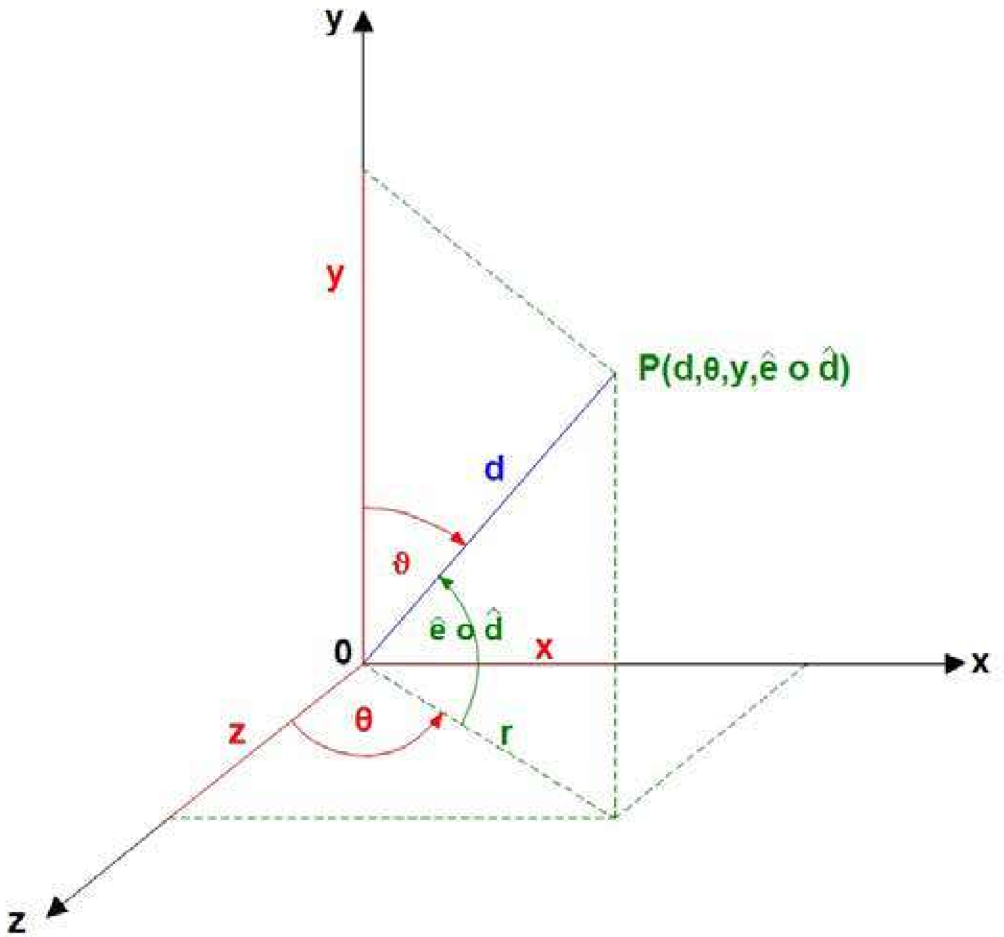


2.7.4. En función de coordenadas geodésicas

Las coordenadas geodésicas también permiten presentar un punto de la tierra con respecto al origen representaría un vector en el espacio de la siguiente manera:

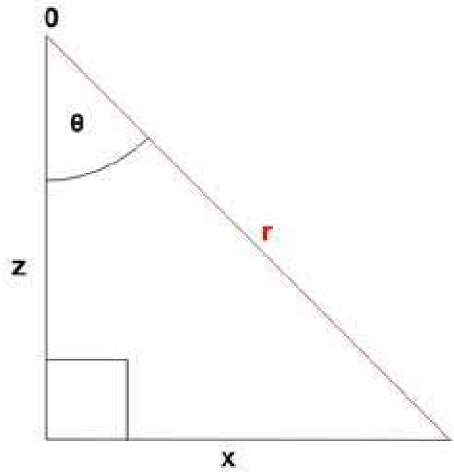
$$P = \left[d\text{,longitud}\left(\theta\right)\text{,latitud}\left(\hat{e} \; o \; \hat{d}\right) \right]$$

Figura 5.11 Coordenadas geodésicas



5.8. Transformación de coordenadas en el espacio

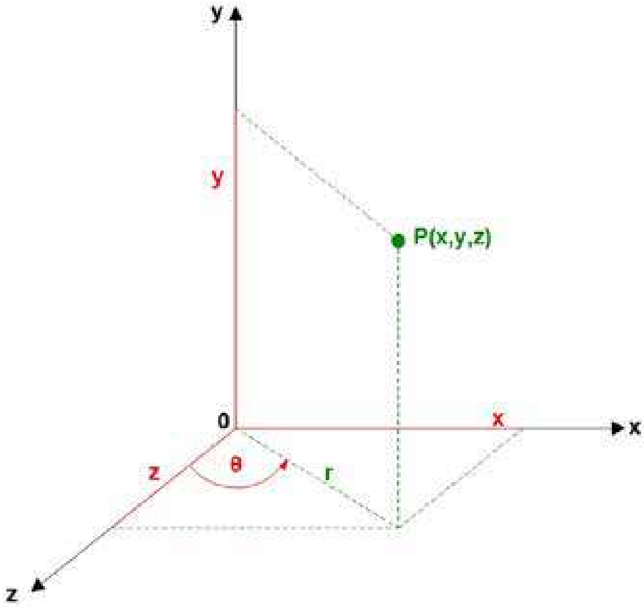
a) Rectangulares (X, Y, Z) a cilíndricas (r, θ, γ)



$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\vec{z}\right) \\ \gamma &= y \end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

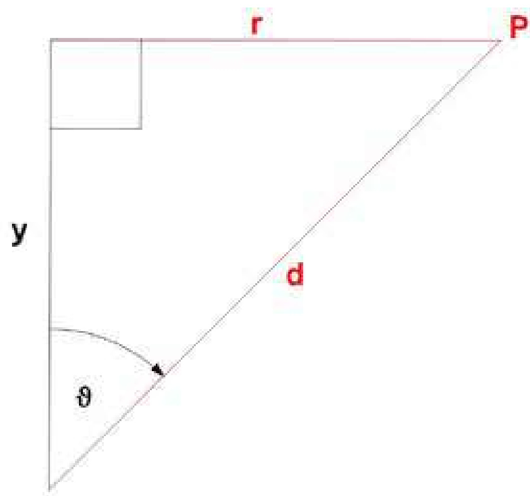
b) Cilíndricas (r, θ, γ) a rectangulares (X, Y, Z)

Figura 5.12 Transformación de coordenadas



$$\left.\begin{aligned} x &= r\,sen\,\theta \\ z &= r\cos\theta \\ \gamma &= y \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

c) Rectangulares (X, Y, Z) a esféricas (d, θ, φ)



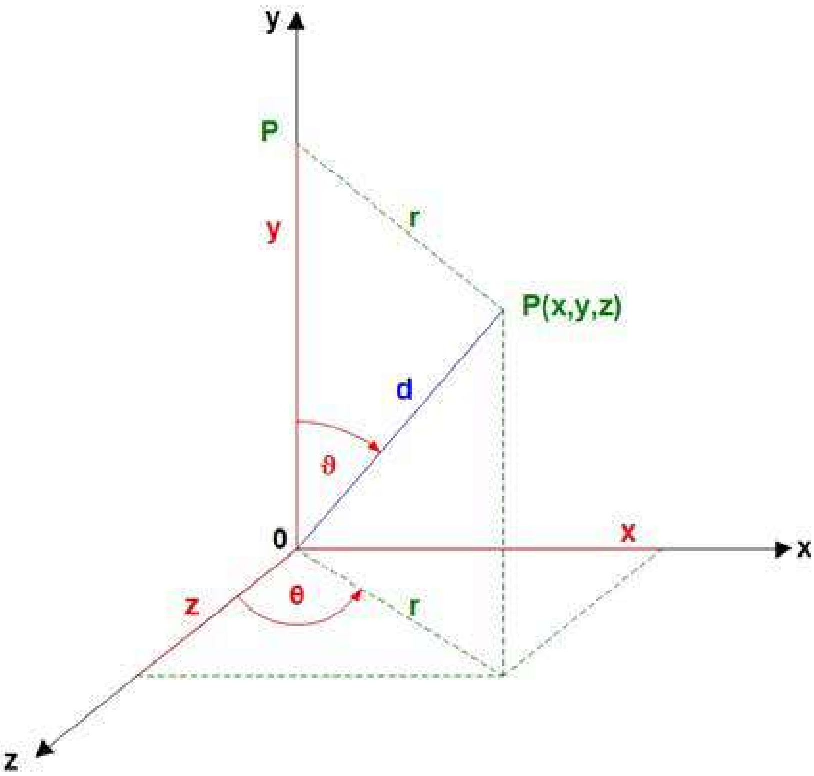
$$d = \sqrt{y^2 + r^2}$$
$$r^2 = x^2 + z^2$$

Luego:

$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{y}\right) \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5.20)$$

d) Esféricas (d, θ, φ) a rectangulares (X, Y, Z).

Figura 5.13 Transformación de coordenadas



$$z = r\cos\theta \qquad ; \qquad x = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r = d\,\text{sen}\,\varphi$$

Luego:

$$\left.\begin{aligned} x &= d\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta \\ y &= d\cos\varphi \\ z &= d\,\text{sen}\varphi\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

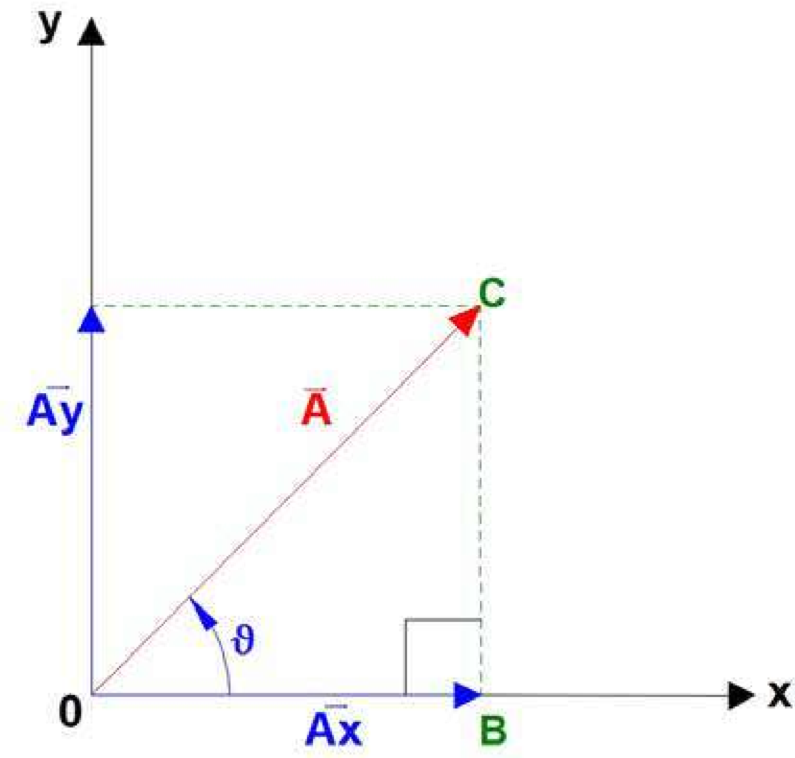
5.8.1. Método analítico para transformación de coordenadas

a) Coordenadas polares (A, Ø) a rectangulares (Ax, Ay, Az)

En el triángulo rectángulo OBC (fig 5.14)

$$\left.\begin{aligned} &\cos\phi = \frac{Ax}{A} = \cos\phi \\ &\text{sen}\phi = \frac{Ax}{A} = \text{sen}\phi \\ &\text{Por lógica en el plano } x\,y\ Az = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Figura 5.14 Cambio de coordenadas



b) Coordenadas rectangulares (Ax, Ay, Az) a polares (A, Ø).

En el triángulo rectángulo OBC aplicamos el teorema de Pitágoras: $A^2 = Ax^2 + Ay^2$.

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{Ax^2 + Ay^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{Ay}{Ax}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5.23)$$

Si el vector está en el espacio como en la figura 5.2, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo principal (fig. 5.15 (a))

$$A^2 = A_{XZ}^2 + A_Y^2$$

Y en el triángulo secundario (Fig. 5.15 (b))

$$A_{XZ}^2 = A_X^2 + A_Z^2$$

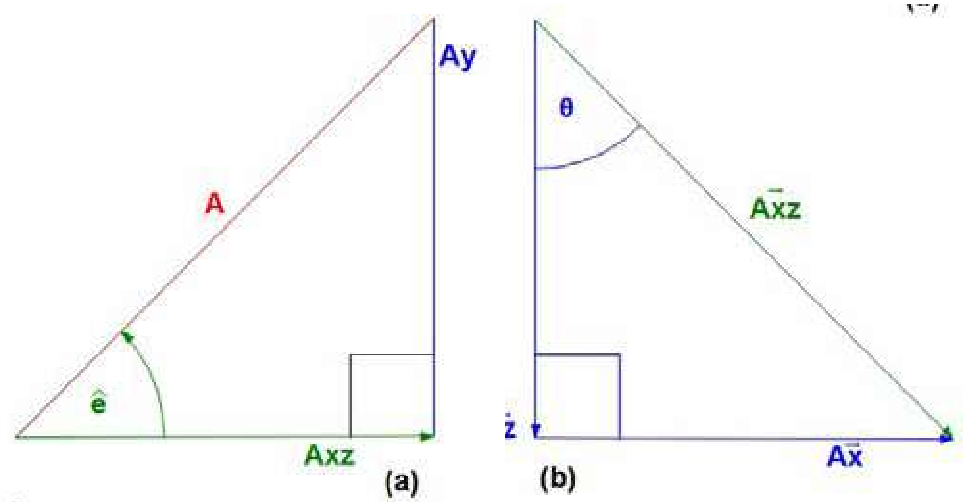
Y en el triángulo secundario (fig. 5.15 (b))

$$A^2 = A_X^2 + A_y^2 + A_Z^2$$

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_y^2 + A_Z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{Ay}{Ax}\right) \\ \hat{e} &= \cos^{-1}\frac{\text{Axz}}{A} \end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

Figura 5.15 Triángulos principal y secundario



Pero para obtener coordenadas rectangulares en forma analítica se prefiere aplicar las fórmulas (5.14) en función de los cosenos de los ángulos directores.

5.8.2. En función de coordenadas rectangulares: especificando las coordenadas del origen y extremo del vector

Cuando expresen en forma analítica un vector ($\overrightarrow{AB}$) especificando las coordenadas del punto de origen A (Ax, Ay, Az) y las del punto extremo B (Bx, By, Bz), se debe transformar las coordenadas (componentes rectangulares) de un solo punto (extremo del vector) siempre y cuando el punto A (origen) coincida con el origen del sistema de coordenadas (0, 0, 0) o que este punto esté en el punto A. Esto se consigue analíticamente restando las coordenadas del extremo (Bx, By, Bz) menos las del origen (Ax, Ay, Az).

$$\overrightarrow{AB} = \left[(B) - (A)\right] = \left[(Bx, By, Bz) - (Ax, Ay, Az)\right]$$
$$\overrightarrow{AB} = \left[(Bx - Ax),(By - Ay), (Bz - Az)\right]$$
$$\overrightarrow{AB} = (ABx, ABy, ABz)$$

Demostración:

Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ con las siguientes coordenadas rectangulares:

$$A = (Ax, Ay, 0) \qquad \text{y} \qquad B = (Bx, By, 0)$$

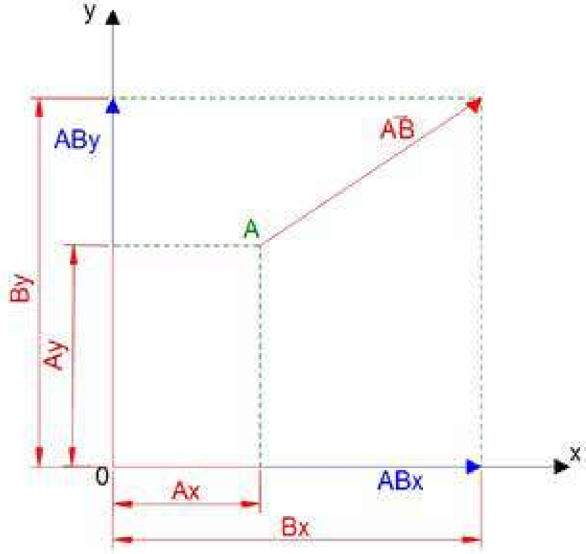
Como son puntos localizados en el plano XY, los dibujamos (fig. 5.16)

Según la figura 5.16, las coordenadas o componentes rectangulares del vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\left.\begin{aligned} ABx &= Bx - Ax \\ ABy &= By - Ay \\ ABz &= Bz - Az \end{aligned}\right\}$$

Lo que queda demostrado.

Figura 5.16 Coordenadas rectangulares (origen-extremo)

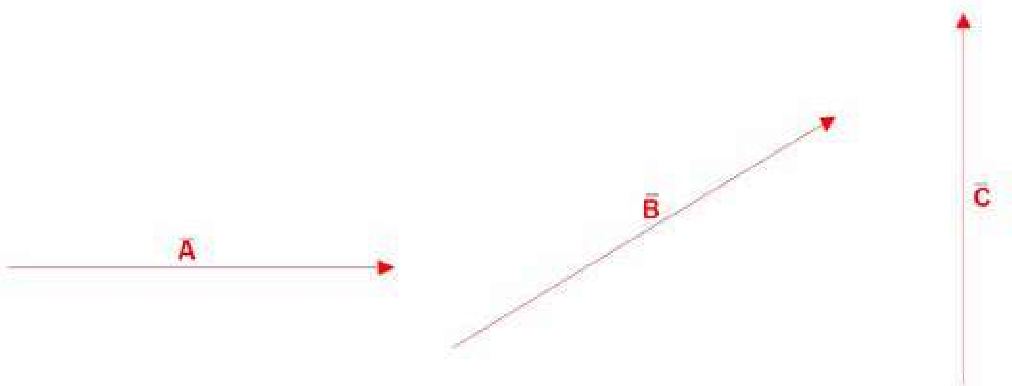


5.9. OPERACIONES CON VECTORES

5.9.1. Suma de vectores o adición vectorial

5.9.1.1. Método del polígono (forma gráfica)

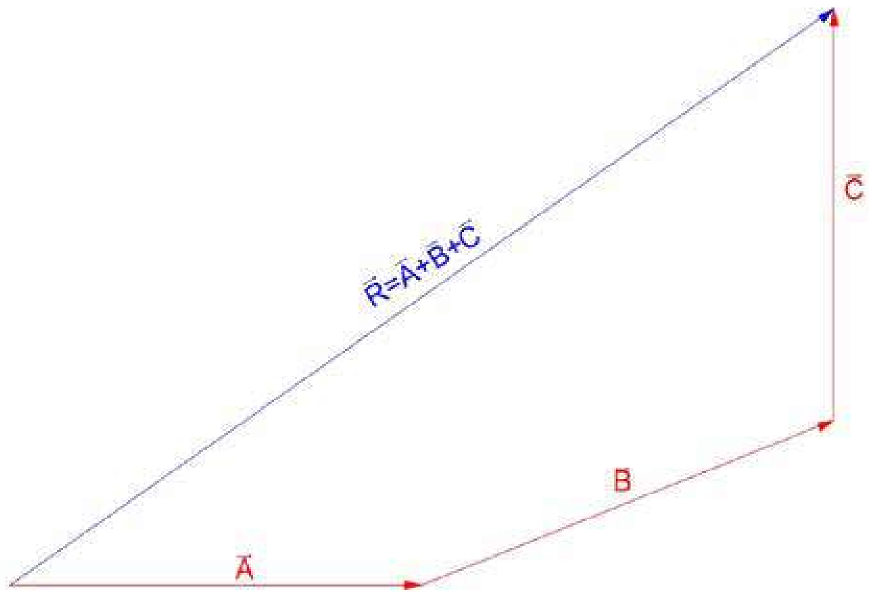
Dados los siguientes vectores:



$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

Este método de suma consiste en dibujar los vectores desde un punto cualesquiera uno a continuación de otro, y la suma en forma gráfica es el vector que inicia en el origen del primero y termina en el extremo del último vector (Fig. 5.17).

Figura 5.17 Método del polígono

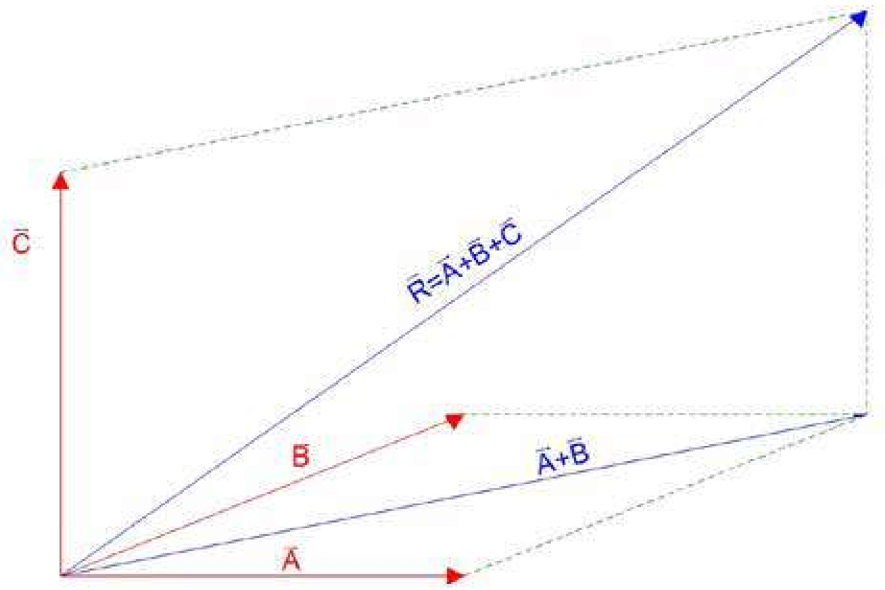


5.9.1.2. Método del paralelogramo (forma gráfica)

Este método consiste en sumar vectores de dos en dos. Los dos vectores que van a sumarse se dibujan a partir de un punto común de origen y luego se traza una paralela al primero por el extremo del segundo, y una paralela al segundo por el extremo del primero. De esta forma, resulta un paralelogramo, la suma es la diagonal que inicia en el origen común y termina en el vértice opuesto (fig. 5.18).

En esta figura se ha procedido a sumar por el método del paralelogramo $\vec{A} + \vec{B}$ primero y luego $\vec{C}$ (fig. 5.18).

Figura 5.18 Método del Paralelogramo



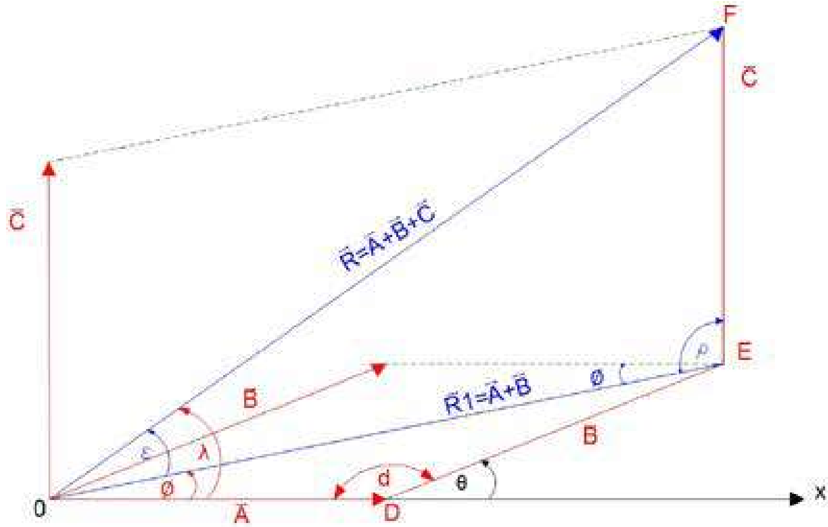
La suma de vectores cumple con la propiedad conmutativa, lo que significa que el orden de los sumandos no altera el resultado.

5.9.1.3. Método del paralelogramo (forma analítica)

Estos métodos de sumar vectores son útiles si los complementamos con una forma analítica de sumar vectores.

Refiriéndonos a la fig. 5.18, elegimos en primer lugar $\vec{A} + \vec{B}$.

Figura 5.19 Suma por el paralelogramo



En el triángulo ODE (que no es rectángulo) podemos determinar la longitud de $|\vec{A} + \vec{B}|$aplicando la ley de los cosenos, así:

$$R_1^2 = A^2 + B^2 - 2AB\ \cos\delta \quad ; \qquad \delta = 180° - \theta$$

$$\cos\left(180° - \theta\right) = -\cos\theta$$

Luego:

$$R_1 = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

La dirección y el sentido, si se tratara de vectores en el plano, se pueden determinar con el ángulo Ø medido en sentido antihorario con respecto al eje X (positivo), lo determinamos aplicando la ley de los senos:

$$\frac{B}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{R_1}{\operatorname{sen}\delta} \Rightarrow \phi = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{B}{R_1}\operatorname{sen}\delta\right];\ \operatorname{sen}\left(180° - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

Nos queda:

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{B}{R_1}\operatorname{sen}\theta\right]$$

Para determinar analíticamente la suma: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R}$, nos referimos al triángulo OFE en la figura 5.19 y, para determinar el módulo $|\vec{R}|$, aplicamos la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} R^2 &= R_1^2 + C^2 - 2R_1C\cos\rho \\ \rho &= 90° + \phi \end{aligned} \quad ; \text{ luego:}$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + C^2 - 2R_1C\cos\rho} \qquad (5.25)$$

La dirección y sentido también los podemos expresar analíticamente con el ángulo λ formado en sentido antihorario con el eje X (+).

$$\lambda = \phi + \varepsilon \qquad (5.26)a$$

Y el ángulo ε lo podemos determinar con el mismo triángulo OEF aplicando la ley de los senos:

$$\frac{C}{\operatorname{sen} E} + \frac{R}{\operatorname{sen}\rho} \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{C}{R}\operatorname{sen}\rho\right] \qquad (5.26)b$$

Y así estaría definido el ángulo con la ecuación(5.26)a.

5.9.1.4. Método algebraico

Este método es el más adecuado para sumar vectores. Para hacerlo, lo único que se exige es que los vectores estén expresados en función de vectores base; así:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K} \\ \vec{B} &= Bx\vec{i} + By\vec{J} + Bz\vec{K} \\ \vec{C} &= Cx\vec{i} + Cy\vec{J} + Cz\vec{K} \\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (Ax + Bx + Cx)\vec{i} + (Ay + By + Cy)\vec{J} + (Az + Bz + Cz)\vec{K} \end{aligned}$$

$$\vec{R} = Rx\vec{i} + Ry\vec{J} + Rz\vec{K} \qquad (5.27)$$

En donde:

$$Rx = Ax + Bx + Cx = \overset{\rightarrow +}{\sum} Vx$$

$$Ry = Ay + By + Cy = {}^{+}_{\uparrow}\sum Vy$$

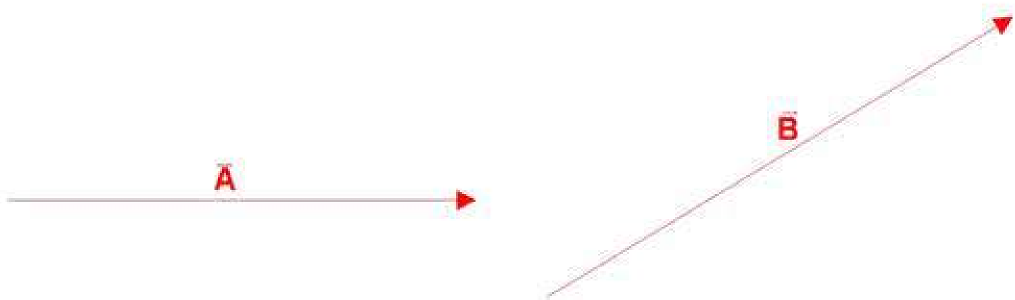
$$Rz = Az + By + Cz = \overset{+\leftarrow}{\sum} Vz$$

Estas sumatorias $\sum$ son algebraicas; por ello, el método se llama «ALGEBRAICO».

5.9.2. Resta o sustracción de vectores

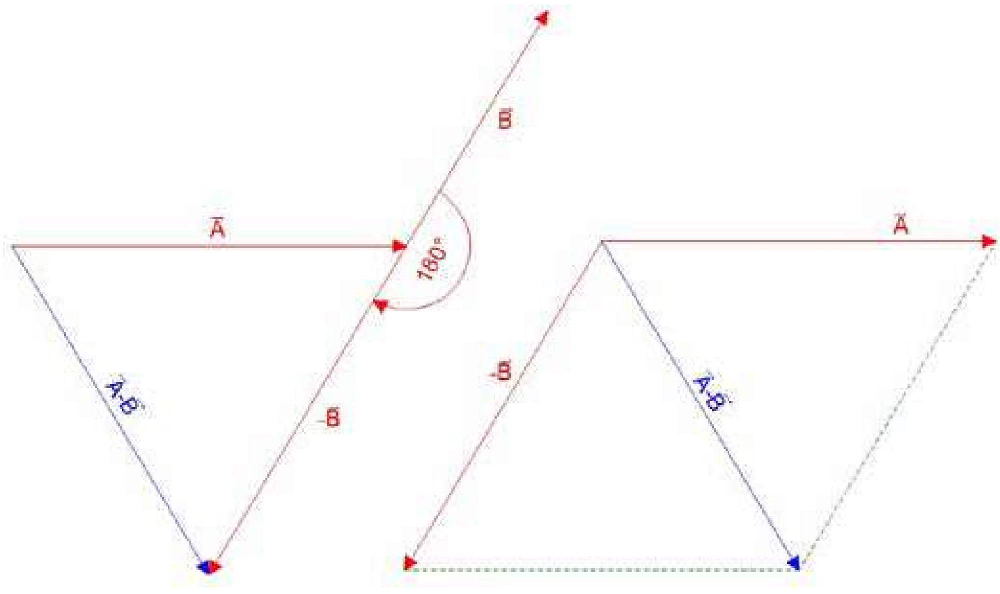
Los métodos para restar vectores son los mismos de la suma solo que hay que sumar $\vec{A} + (-\vec{B})$ para ello se define el vector negativo de un vector como uno igual en módulo y dirección, pero de sentido opuesto, en forma gráfica se gira el vector positivo 180° y este es el método negativo.

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$



La resta no cumple con la propiedad conmutativa, es decir;

$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$



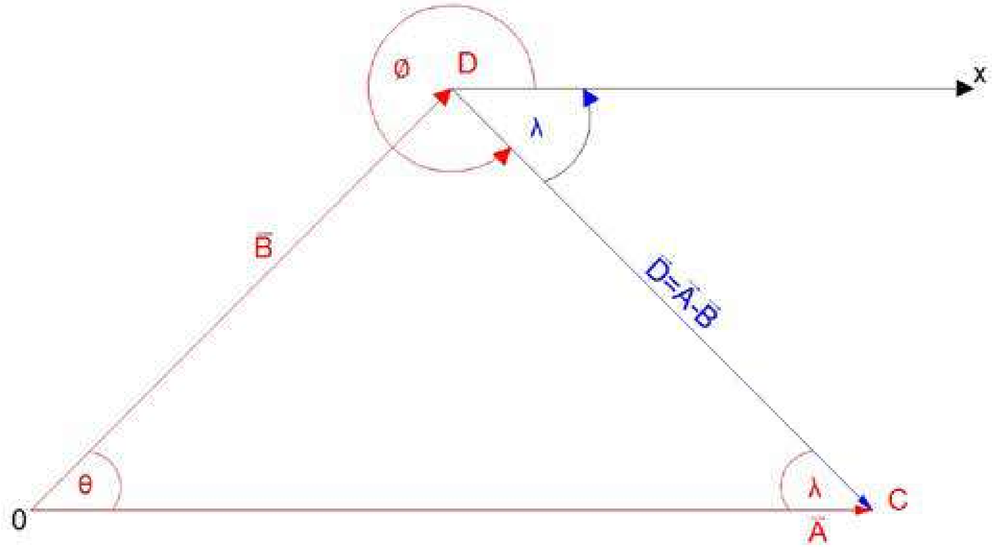
Estos métodos pueden sustituirse por el método del triángulo.

5.9.2.1. Método del triángulo

Analíticamente, resolvemos el triángulo de la figura 5.20. Para determinar el módulo $|\vec{A} - \vec{B}| = (\vec{D})$, aplicamos la ley de los cosenos:

$$D = \sqrt{A^2 - B^2 - 2AB \cos \theta} \qquad (5.28)$$

Figura 5.20 Método del triángulo



Y la dirección y sentido con el ángulo Ø medido en sentido antihorario con respecto al eje X (positivo).

$$\phi = 360° - \lambda \qquad (5.29)$$

El ángulo λ lo obtenemos a partir de la ley de los senos aplicada en el triángulo OCD de la figura 5.20, así:

$$\frac{B}{\operatorname{sen}\lambda} = \frac{D}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \lambda = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{B}{D}\operatorname{sen}\theta\right] \qquad (5.29)a$$

Pero el método más adecuado será el «método algebraico», definiendo el negativo del vector $\vec{B}$ o cambiando de signos a sus componentes rectangulares:

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K} \qquad ; \qquad \vec{B} = Bx\vec{i} + By\vec{J} + Bz\vec{K}$$

$$-\vec{B} = -Bx\vec{i} - By\vec{J} - Bz\vec{K}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

$$\vec{D} = Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K} - Bx\vec{i} - By\vec{J} - Bz\vec{K}$$

$$\vec{D} = \left(Ax - Bx\right)\vec{i} + \left(Ay - By\right)\vec{J} + \left(Az - Bz\right)\vec{K}$$

$$\vec{D} = Dx\vec{i} + Dy\vec{J} + Dz\vec{K} \qquad (5.30)$$

5.9.3. Producto de un número real (n) por un vector ($\vec{A}$)

Si multiplicamos un número real (n), que es adimensional, por un vector $\vec{A}$, obtendremos también un vector $\vec{A}_1$, cuyo módulo será *n* veces el módulo del vector $|\vec{A}|$, tendrá la misma dirección y el mismo sentido si *n* es positivo y sentido contrario si *n* es negativo.

$$A_1 = nA \qquad (5.31)$$

El vector $\vec{A}_1$ tendrá también la misma naturaleza del vector $\vec{A}$, o sea si $\vec{A}$ es velocidad, $\vec{A}_1$ también será velocidad.

5.9.4. Producto de escalar (K) por un vector ($\vec{A}$)

Al multiplicar una magnitud escalar (K) por una magnitud vectorial ($\vec{A}$), se obtendrá también un vector $\vec{B}$ cuyo módulo será K veces el módulo de $|\vec{A}|$, tendrá la misma dirección y el mismo sentido si K es positivo y sentido contrario si K es negativo, pero como K tiene dimensiones, el vector $\vec{B}$ será de diferente naturaleza que el vector $\vec{A}$.

$$B = K\,A \qquad (5.32)$$

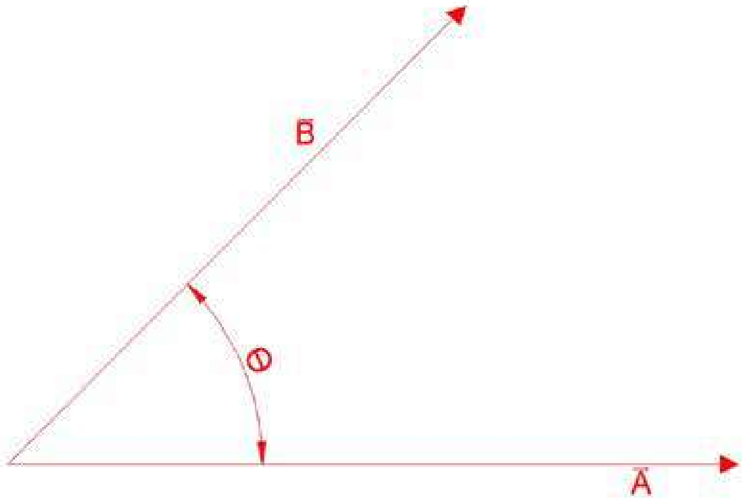
5.9.5. Producto entre vectores

5.9.5.1. Producto punto, escalar o interno

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores cualesquiera que forman un ángulo agudo θ entre ellos. El producto punto (g) resulta ser un escalar así:

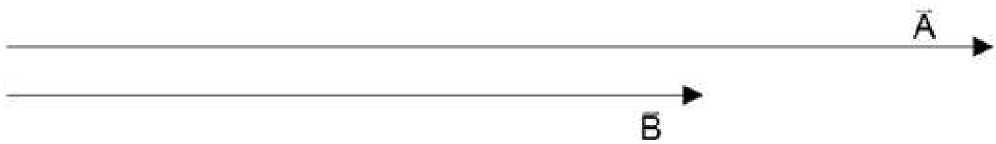
$$A \cdot B = AB\cos\theta \qquad (5.33)$$

Figura 5.21 Producto escalar



El valor del producto escalar no solo dependerá del módulo de $|\vec{A}|$ y de $|\vec{B}|$, sino también del ángulo θ que existe entre ellos.

Si θ = 0° los vectores son paralelos:

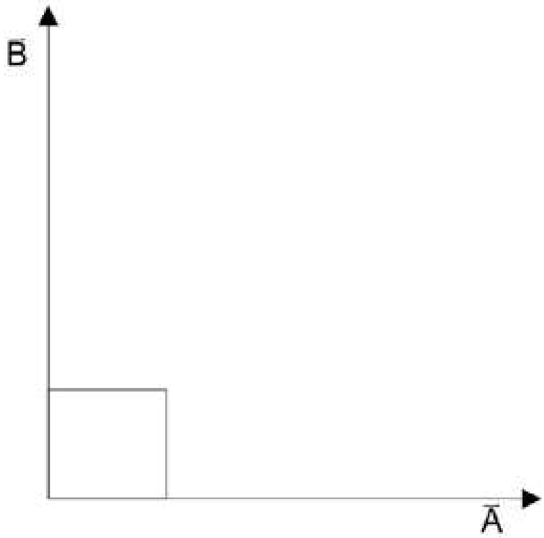


$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ valor máximo +

$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ $\quad\quad \overrightarrow{\mu A} = \overrightarrow{\mu B}$ (condición de paralelismo)

$\vec{B} \cdot \vec{B} = B^2$

Si θ=90° los vectores son perpendiculares:



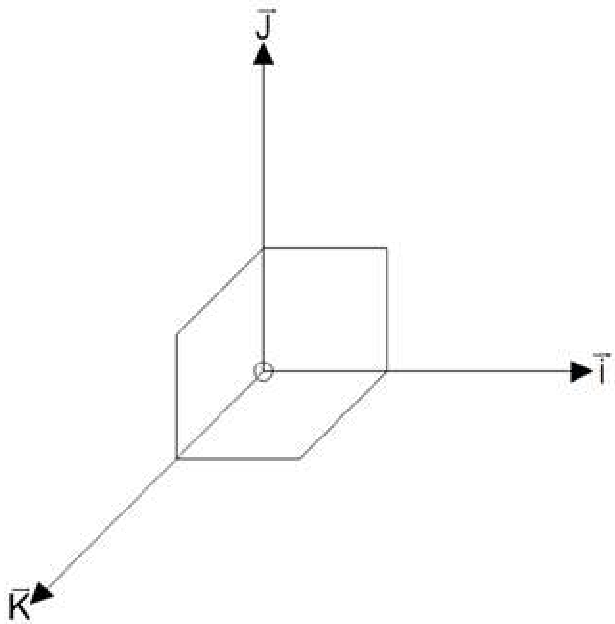
$A \cdot B = 0$ (condición de perpendicularidad)

Si θ=180° los vectores son antiparalelos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\vec{A} \cdot \vec{B}$ (valor máximo) negativo.

$\overrightarrow{\mu A} = -\overrightarrow{\mu B}$ (condición de antiparalelismo).

5.9.5.1.1. Producto punto entre vectores base



$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\vec{J}\cdot\vec{J} = \left|\vec{J}\right|\left|\vec{J}\right|\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

(vectores perpendiculares)

$$\vec{K}\cdot\vec{K} = \left|\vec{K}\right|\left|\vec{K}\right|\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{J} = \vec{J}\cdot\vec{K} = \vec{K}\cdot\vec{i} = \vec{J}\cdot\vec{i} = \vec{K}\cdot\vec{J} = \vec{i}\cdot\vec{K} = 0$$

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K}$$

$$\vec{B} = Bx\vec{i} + By\vec{J} + Bz\vec{K}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K}\right)\cdot\left(Bx\vec{i} + By\vec{J} + Bz\vec{K}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = Ax\,Bx\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) + Ax\,By\cancel{\left(\vec{i}\cdot\vec{J}\right)} + Ax\,Bz\cancel{\left(\vec{i}\cdot\vec{K}\right)} +$$
$$Ay\,Bx\cancel{\left(\vec{J}\cdot\vec{i}\right)} + Ay\,By\left(\vec{J}\cdot\vec{J}\right) + Ay\,Bz\cancel{\left(\vec{J}\cdot\vec{K}\right)} +$$
$$Az\,Bx\cancel{\left(\vec{K}\cdot\vec{i}\right)} + Az\,By\cancel{\left(\vec{K}\cdot\vec{J}\right)} + Az\,Bz\left(\vec{K}\cdot\vec{K}\right)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz \qquad (5.34)$$

5.9.5.1.2. Propiedades del producto punto:

- Es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Es homogéneo: $a\vec{A} \cdot b\vec{B} = ab(\vec{A} \cdot \vec{B})$
- Es distributivo respecto a la suma: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- Es un producto interno: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot Bcos\theta$

El vector $\vec{B}_A$ (proyección de $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$) tiene el siguiente módulo:

$B_A = B\cos\theta$

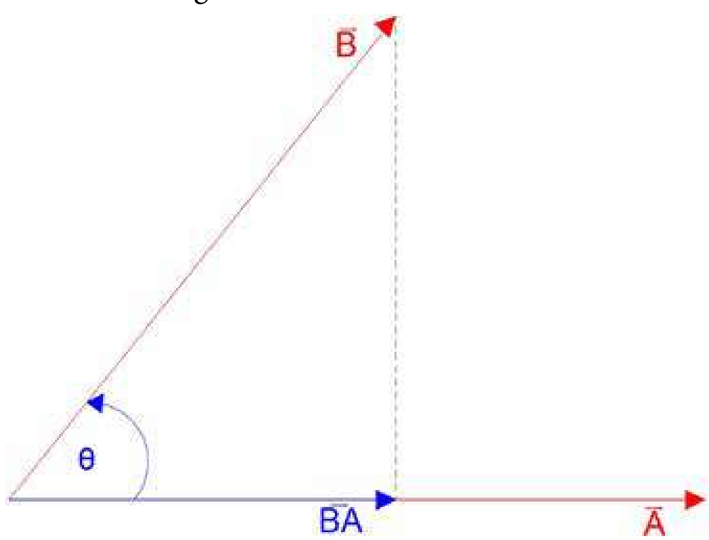
Por lo tanto, el producto punto:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot B\cos\theta$

A = módulo del vector $\vec{A}$.

$Bcos\theta$: módulo del vector proyección de $\vec{B}$ en $\vec{A}$.

Figura 5.22 Producto interno



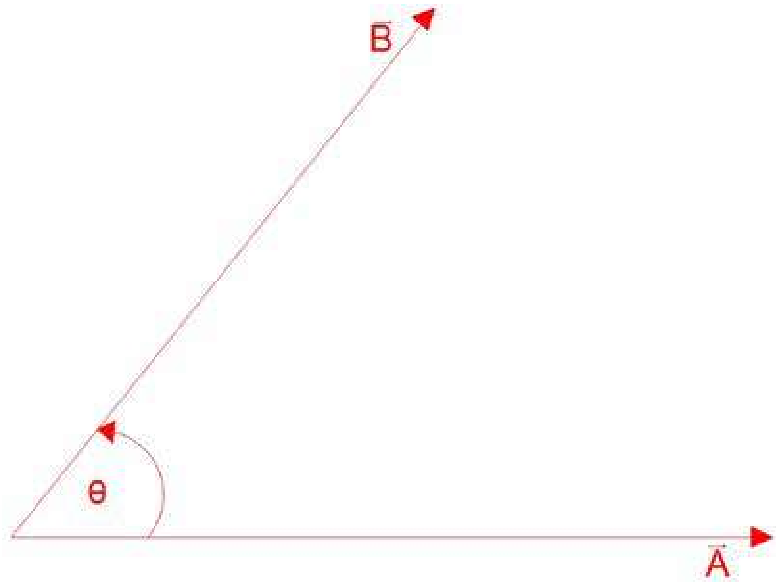
Y estos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}_A$ son vectores que están en la misma dirección, o sea están contenidos internamente en el mismo eje. Por ello se le llama también producto interno.

5.9.5.2. Producto cruz, vectorial o externo

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}_A$ dos vectores cualesquiera que formen un ángulo agudo θ entre ellos. El producto cruz (X) da como resultado un nuevo vector $\vec{C}$ definido así:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad (5.35)$$

Figura 5.23 Producto cruz



2.9.5.2.1. El módulo de $\vec{C}$

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A\,B\,\mathrm{sen}\theta \qquad (5.35)\mathrm{a}$$

5.9.5.2.2. Dirección de $\vec{C}$

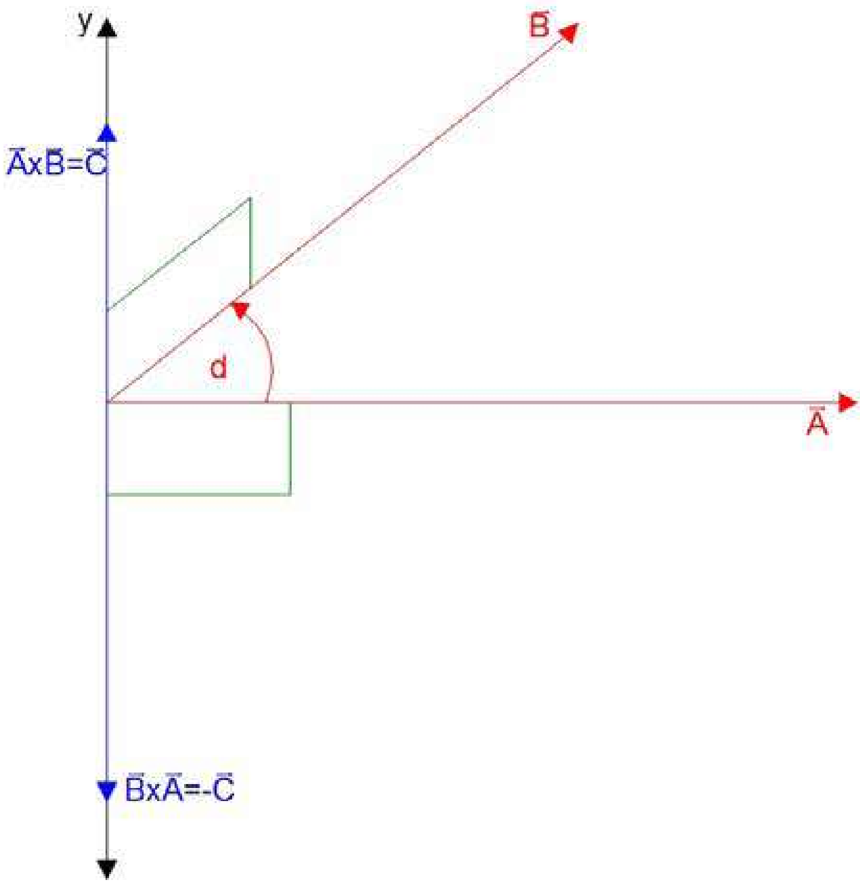
$\vec{A}$ x $\vec{B}$ tiene una dirección tal, que resulta ser perpendicular tanto a la dirección de $\vec{A}$ como a la de $\vec{B}$; o sea, es perpendicular al plano que forman las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

– Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano XY el vector $\vec{C}$ tendrá la dirección del eje Z.

– Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano YZ, el vector $\vec{C}$ tendrá la dirección del eje X.

– Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano XZ (horizontal), el vector $\vec{C}$ tendrá la dirección del eje Y, así:

Figura 5.24 Regla mano derecha



5.9.5.2.3. El sentido de $\vec{C}$

Se aplica la regla del tornillo de roscas a derechas. Se coloca un tornillo perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se lo hace girar en el sentido de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ formando el ángulo agudo θ. En el sentido que avance este tornillo, ese será el sentido del vector $\vec{C}$. Considerando la figura 5.24, si se hace girar un tornillo perpendicular al plano XZ (horizontal) en el sentido de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ (sentido antihorario), el tornillo se dirige hacia arriba o sale del plano; luego, el sentido de $\vec{C}$ es hacia arriba. Si estuviésemos definiendo $\vec{B} \times \vec{A}$, el sentido sería hacia abajo. O sea, $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$, es decir no cumple con la propiedad conmutativa.

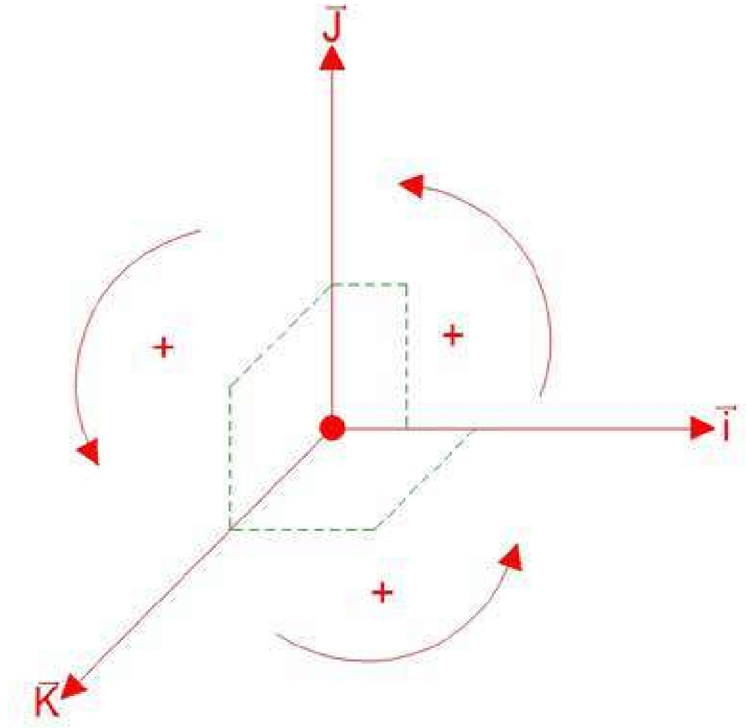
5.9.5.2.4. Propiedades del producto cruz

- Es homogéneo: $a\vec{A} \times b\vec{B} = ab(\vec{A} \times \vec{B})$
- Es distributivo respecto a la suma: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

Producto cruz de los vectores base $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{K}})$

$$\vec{i} \times \vec{i}$$

Figura 5.25 Producto cruz (vectores base)



Módulo: $\left|\vec{i}\times\vec{i}\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\text{sen}0^{\circ} = 0$

Por lo tanto, el producto:

$$i \times i = 0$$

Carece de dirección y sentido.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}\times\vec{i} = \vec{J}\times\vec{J} = \vec{K}\times\vec{K} = 0 \\ \vec{i}\times\vec{J} = \vec{K};\vec{J}\times\vec{K} = \vec{i};\vec{K}\times\vec{i} = \vec{J} \\ \vec{J}\times\vec{i} = -\vec{K};\vec{K}\cdot\vec{J} = -\vec{i};\vec{i}\times\vec{K} = -\vec{J} \end{array}\right\} \quad (5.36)$$

En el sentido que indican las flechas (antihorario), el producto es positivo.

Para resolver un producto cruz entre vectores, los vectores deben estar expresados en vectores base:

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{J} + Az\vec{K} \qquad ; \qquad \vec{B} = Bx\vec{i} + By\vec{J} + Bz\vec{K}$$

$$A \times B = \left(Axi + AyJ + AzK\right) \times \left(Bxi + ByJ + BzK\right)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = Ax\,Bx\,\cancel{\left(\vec{i} \times \vec{i}\right)} + Ax\,By\left(\vec{i} \times \vec{J}\right) + Ax\,Bz\left(\vec{i} \times \vec{K}\right) +$$

$$Ay\,Bx\left(\vec{J} \times \vec{i}\right) + Ay\,By\,\cancel{\left(\vec{J} \times \vec{J}\right)} + Ay\,Bz\left(\vec{J} \times \vec{K}\right) +$$

$$Az\,Bx\left(\vec{K} \times \vec{i}\right) + Az\,By\left(\vec{K} \times \vec{J}\right) + Az\,Bz\,\cancel{\left(\vec{K} \times \vec{K}\right)}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = Ax\,By\left(\vec{K}\right) + Ax\,Bz\left(-\vec{J}\right) + Ay\,Bx\left(-\vec{K}\right) + Ay\,Bz\left(\vec{i}\right) + Az\,Bx\left(\vec{J}\right) + Az\,By\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{A} \times B = \left(Ay\,Bz - Az\,By\right)\vec{i} + \left(Az\,Bx - Ax\,Bz\right)\vec{J} + \left(Ax\,By - Ay\,Bx\right)\vec{K}$$

$$C = A \times B = Cxi + CyJ + CzK \qquad (5.37)$$

Otra forma de obtener un producto cruz o vectorial entre dos vectores es resolviendo un determinante de tres por tres como el siguiente, en el que puede utilizarse, por ejemplo, el método de «DESARROLLO POR MENORES».

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{i}\begin{vmatrix} Ay & Az \\ By & Bz \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} Ax & Az \\ Bx & Bz \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(Ay\,Bz - Az\,By\right)\vec{i} - \left(Ax\,Bz - Az\,Bx\right)\vec{J} + \left(Ax\,By - Ay\,Bx\right)\vec{K}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(Ay\,Bz - Az\,By\right)\vec{i} + \left(Az\,Bx - Ax\,Bz\right)\vec{J} + \left(Ax\,By - Ay\,Bx\right)\vec{K}$$

5.10. APLICACIONES DE LOS PRODUCTOS VECTORIALES

Los productos entre vectores, ya sea el producto punto o el producto cruz, se aplican en muchas definiciones en la ciencia, en los diversos campos como en mecánica: trabajo, potencia, torque y en el electromagnetismo. Pero además podemos también hallar aplicaciones más inmediatas, como en la geometría y en la cinemática.

5.10.1. Aplicaciones del producto punto

5.10.1.1. Cálculo analítico del ángulo entre dos vectores dados.

Si tenemos dos vectores localizados en un plano, o en el espacio y queremos hallar el ángulo comprendido entre los mismos, se expresa los vectores en función de vectores base y se utiliza la definición del producto punto (ec. (5.33)).

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{Ax\,Bx + Ay\,By + Az\,Bz}{\sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}\sqrt{Bx^2 + By^2 + Bz^2}}$$

Y luego se obtiene el cos-1 para determinar θ

5.10.1.2. Determinación analítica de la proyección de un vector ($\overrightarrow{B_A}$) en la dirección de otro vector ($\vec{A}$)

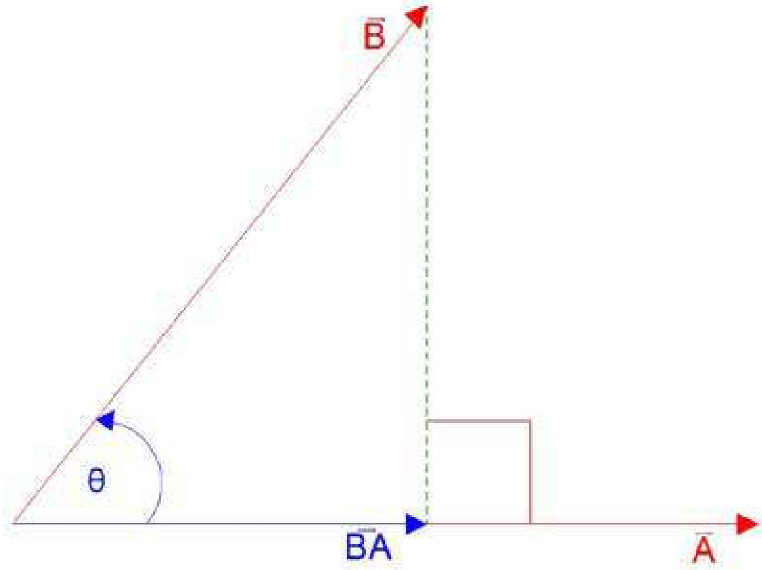
Si se quiere determinar, por ejemplo, la proyección del vector $\vec{B}$ en la dirección del vector $\vec{A}(\overrightarrow{B_A})$ en forma gráfica, ya se lo ha determinado en la figura 5.26. En forma analítica:

$$\overrightarrow{B_A} = |\overrightarrow{B_A}|\,\overrightarrow{\mu_{BA}}$$

El módulo del vector $|\overrightarrow{B_A}|$ según la fig 5.26, es:

$$B_A = B\cos\theta$$

Figura 5.26 Vector proyección



Y según la definición del producto punto (ec. (5.33)):

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{A}} \text{ luego y como } \overrightarrow{\mu_{BA}} = \overrightarrow{\mu_A} = \frac{\vec{A}}{A} \text{ nos da:}$$

$$\overrightarrow{B_{\text{A}}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}\overrightarrow{\mu_A} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}\cdot\frac{\vec{A}}{A} \Rightarrow \overrightarrow{B_A} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A}\cdot\vec{A}}{A^2} \qquad (5.38)$$

O también:

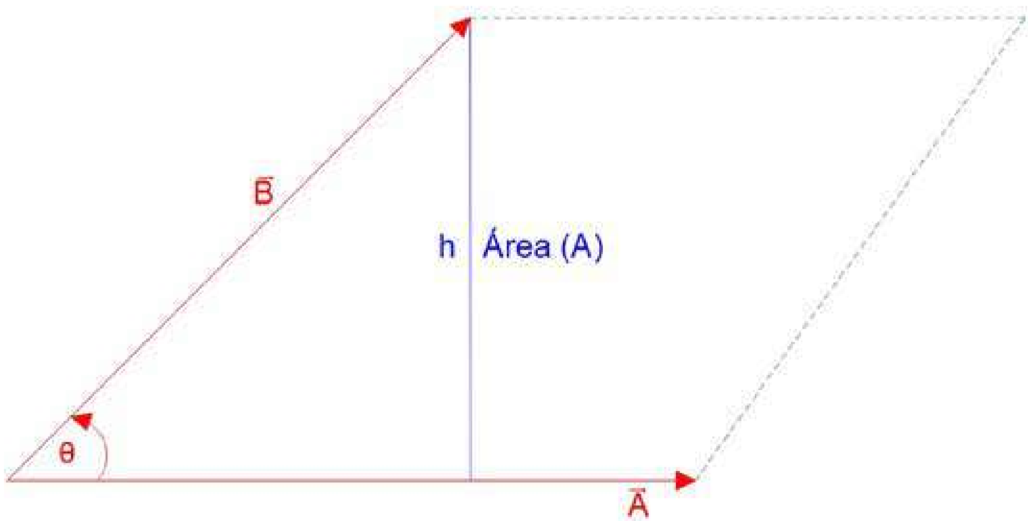
$$\overrightarrow{B_A} = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mu_A}\cdot\overrightarrow{\mu_A} \qquad (5.39)$$

5.10.2. Aplicaciones del producto cruz

5.10.2.1. Determinación del área de un paralelogramo formado por dos vectores

Según la figura 5.27, se ha construido gráficamente el área del paralelogramo formado por dos vectores:

Figura 5.27 Área paralelogramo



El área del paralelogramo es base por altura.

A = base x altura

A = Ah = AB Sen θ

Este resultado es el módulo del producto cruz (ec. (5.35)a)

Por lo tanto, el área (A) se puede determinar así:

$$A = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right|$$

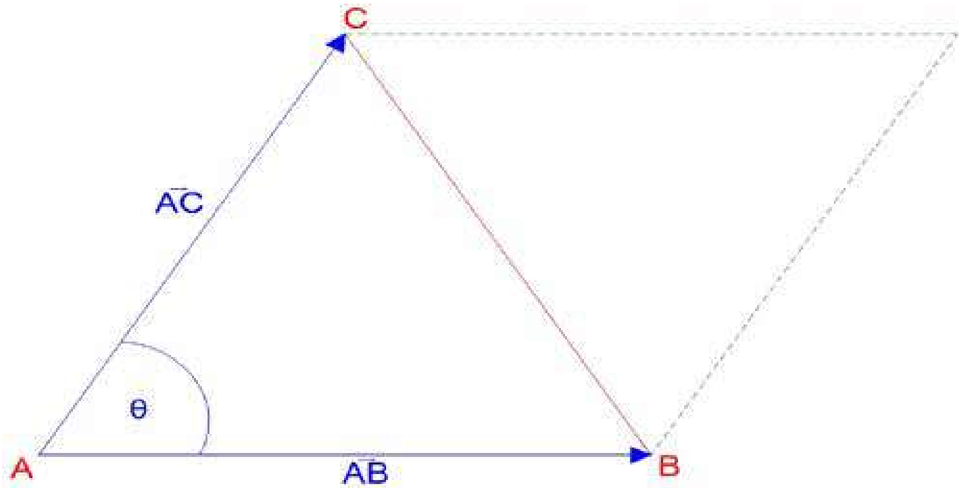
Y, para extraer el módulo, previamente debemos obtener el vector que es el producto cruz entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

5.10.2.2. Determinación del área de un triángulo formado por tres puntos (vértices del triángulo)

Dados los siguientes puntos: A (Ax, Ay, Az); B (Bx, By, Bz); C (Cx, Cy, Cz).

Con los tres puntos, podemos formar dos vectores con uno de los puntos común de origen (punto A).

Figura 5.28 Área del triángulo



$$\overrightarrow{AB} = ABx\vec{i} + ABy\vec{J} + ABz\vec{K}$$

$$\overrightarrow{AC} = ACx\vec{i} + ACy\vec{J} + ACz\vec{K}$$

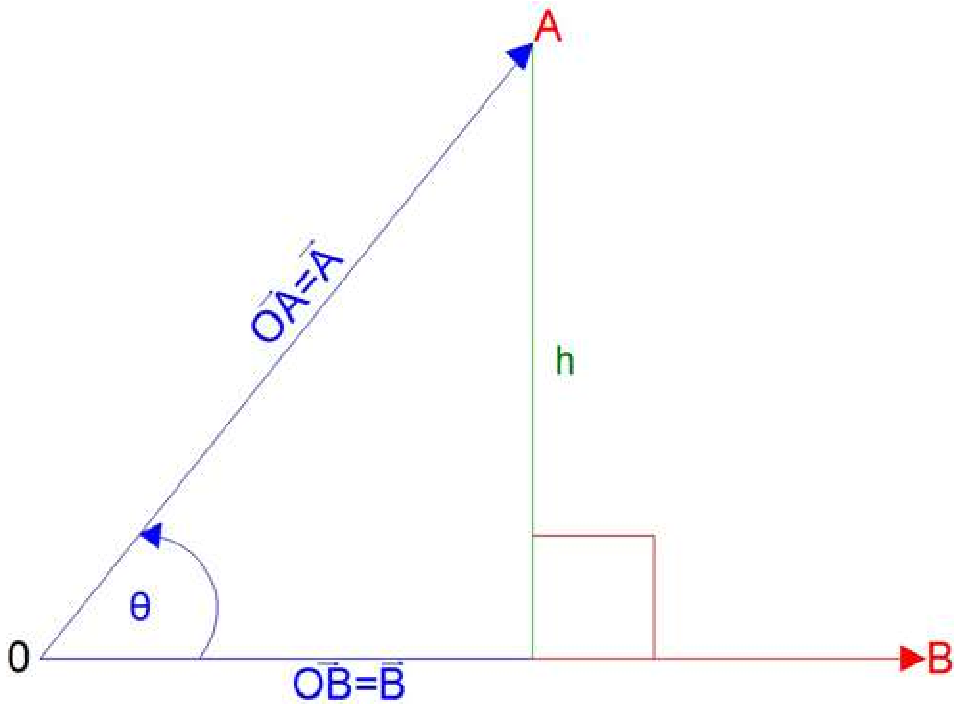
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}AB\text{sen}\theta = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BC\text{sen}\theta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| \qquad (5.40)$$

5.10.2.3. Determinación de la mínima distancia entre un punto y una recta

Si tenemos un punto con las coordenadas A (Ax, Ay, Az) y deseamos saber la mínima distancia con una recta $\overrightarrow{OB} = Bx, By, Bz$, siendo el origen del vector (línea) $\overrightarrow{OB}$. El punto A también se lo puede considerar un vector que parte del origen O (fig. 5.29).

Figura 5.29 Distancia punto-recta



La mínima distancia del punto A (Ax, Ay, Az) a la recta $\overrightarrow{OB}$ es h.

$h = Asen\theta$

El producto cruz entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tiene el siguiente módulo:

$|\vec{A} \text{ x } \vec{B}| = ABsen\theta = BAsen\theta$

Pero como $Asen\theta = h$, tenemos:

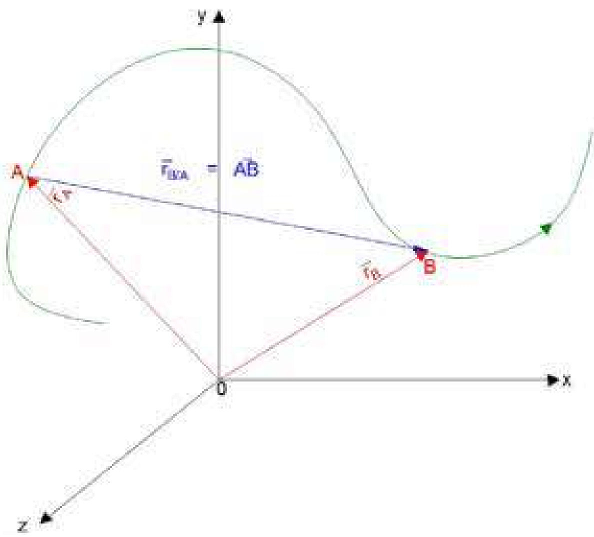
$$h = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{B} \qquad (5.41)$$

5.11. APLICACIÓN DE LA RESTA DE VECTORES

5.11.1. Vector posición ($\vec{r}$) = Vector posición relativo ($\vec{r}_{B/A}$))

El vector posición ($\vec{r}$) se define como un vector que permite localizar un objeto en cualquier lugar. Con respecto un sistema de referencia, cuyo origen es una partícula que está en 0 (0, 0, 0).

Figura 5.30 Vector posición



Es decir, el vector posición de A o de B será un vector que inicia en el origen "O" y termina en A($\overrightarrow{r_A}$), posición de A, en cambio el vector que inicia en el origen "O" y termina en B, es la posición de ($\overrightarrow{r_B}$).

Si deseamos posicionar un objeto, no con respecto al origen (0, 0, 0), sino a cualquier otro punto (partícula) deberíamos especificar. Por ejemplo, la posición de B respecto a *A,* será la posición relativa de B respecto a A($r_{B/A} = \overrightarrow{AB}$). El vector posición relativa es la diferencia entre la posición de B y de $\vec{A}$.

$$\overrightarrow{r_{B/A}} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB} \qquad (5.42)$$

A este vector se le llama también vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta r}$ = variación de posición [12].

CAPÍTULO VI. EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE MAGNITUDES VECTORIALES

6.1. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los siguientes vectores

a. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 100\,\text{cm};$ N25°O

b. $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 50\,\text{cm};$ $\overrightarrow{\mu_{CD}} = 0.25\vec{i} - 0.5\vec{J} + a\vec{K}$

c. $\left|\overrightarrow{EF}yz\right| = 75\,\text{cm}$; 250° con z

d. $\left|\overrightarrow{GH}\right| = 60\,\text{cm}$; $\alpha = 140°;\ \beta = 50°,\ \gamma = 90°$

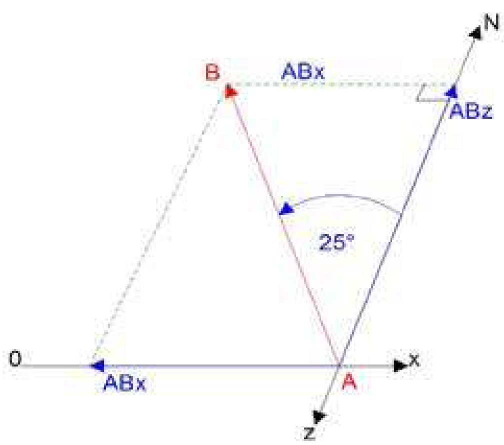
e. $\overrightarrow{IJ} \to I(30,0,-10)\,\text{cm}$; $J(-20,15,\ -40)\text{cm}$

f. $\left|\overrightarrow{KL}\right| = 200\,\text{cm}$; N60°O y ê=65°

Expresarlos en función de los vectores base $\left(\vec{i},\vec{J},\vec{K}\right)$

Solución

a. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 100\,\text{cm};$ N25°O: coordenadas geográficas



$ABx = AB\text{sen}\,25° = 100\,\text{sen}\,25° = -42.26\,\text{cm}$

$ABz = AB\cos 25° = 100\cos 25° = -90.63\,\text{cm}$

$ABy = 0\,\text{cm}$

En función de vectores base:

$\overrightarrow{AB} = ABx\vec{i} + ABy\vec{J} + ABz\vec{K}$

Reemplazando los valores

$\overrightarrow{AB} = \left(-42.26\vec{i} + 0\vec{J} - 90.63\vec{K}\right)\text{cm} \Rightarrow$ en vectores base

b. $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 50\,\text{cm}$; $\overrightarrow{\mu_{CD}} = 0.25\vec{i} - 0.5\vec{J} + a\vec{K}$: módulo por unitario

En el vector unitario debemos calcular el valor de «a» partiendo de la definición del vector unitario:

$\left|\overrightarrow{\mu_{CD}}\right| = 1^2 = (0.25)^2 + (-0.5)^2 + a^2 \Rightarrow$

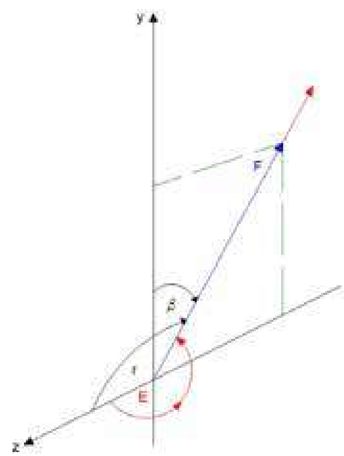
$\sqrt{a^2} = 1 - 0.0625 - 0.25 = \sqrt{0.6275} \Rightarrow a = 0.829$

Luego:

$CD = \left|CD\right| = \mu_{CD} = 50\,\text{cm}\left(0.25i - 0.5J + 0.829K\right)$

$CD = \left(12.5\,i - 25J + 41.45K\right)\text{cm} \Rightarrow$ en vectores base

c. $\left|\overrightarrow{EFyz}\right| = 75\,\text{cm}$; $250°\text{con}\,z$: en coordenadas polares



$\overrightarrow{EF} = EFx\vec{i} + EFy\vec{J} + EFz\vec{K}$: en vectores base.

Determinamos componentes rectangulares por los ángulos directores:

$$EFx = EF\cos\alpha = 75\cos 90° = 0\,\text{cm}$$
$$EFy = EF\cos\beta = 75\cos 20° = 70.5\,\text{cm}$$
$$EFz = EF\cos\gamma = 75\cos 110° = -25.65\,\text{cm}$$

$\beta = 270° - 250° = 20°;\ \gamma = 90° + \beta = 90° + 20° = 110°$

$\alpha = 90°;\ \beta = 20°;\ \gamma = 110°$

$\overrightarrow{EF} = \left(0\vec{i} + 70.5\vec{J} - 25.65\vec{K}\right)\text{cm} \Rightarrow$ en vectores base.

d. $\left|\overrightarrow{GH}\right| = 60\,\text{cm}$; $\alpha = 140°;\ \beta = 50°,\ \gamma = 90°$: módulo y ángulos directores

$\overrightarrow{GH} = GHx\vec{i} + GHy\vec{J} + GHz\vec{K}$

$\overrightarrow{GH}x = 60\cos 140° = 46\,\text{cm}$; $GHy = 60\cos 50° = 38.6\text{cm}$; $GHz = 0$

$\overrightarrow{GH} = \left(-46\vec{i} + 38.6\vec{J} + 0\vec{K}\right)\text{cm} \Rightarrow$ en vectores base

e. $\overrightarrow{IJ} \rightarrow I(30,0,-10)\,\text{cm}$; $J(-20,15,-40)\,\text{cm}$: en coordenadas de origen-extremo.

$IJ = IJxi + IJyJ + IJzK$

$IJ = \left[(J)-(I)\right] = \left[(-20,15,-40)-(30,0,-10)\right] = (-50,15,-30)\text{cm}$

$IJ = \left(-50\,i + 15J - 30K\right)\text{cm} \Rightarrow$ en vectores base

f. $\left|\overrightarrow{KL}\right| = 200\,\text{cm}$; N60°O y ê=65°

$\overrightarrow{KL} = KLxi + KLyJ + KLzK$

$KLy = KL \cdot \text{sen}\, e = 200\ \text{sen}\, 65° = 181.3\ \text{cm}$ (elevación)

$KLxz = 200\cos e = 84.5\,\text{cm}$

$KLx = KLxz \cdot \text{sen} 60° = 84.5\,\text{sen}\, 60° = -73.2$ (Oeste)

$KLz = KLxz \cdot \cos 60° = 84.5 \cos 60° = -42.3$ (Norte)

$\overrightarrow{KL} = \left(-73.2\vec{i} + 181.3\vec{J} - 42.3\vec{K}\right)\text{cm} \Rightarrow$ vectores base.

1.1. Los vectores dados en términos de $\vec{i}, \vec{J}, \vec{K}$ o vectores base son:

$$\overrightarrow{AB} = \left(-42.26\vec{i} + 0\vec{J} - 90.63\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{CD} = \left(12.5\vec{i} - 25\vec{J} + 41.45\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(0\vec{i} + 70.5\vec{J} - 25.65\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{GH} = \left(-46\vec{i} + 38.6\vec{J} + 0\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \left(-50\vec{i} + 15\vec{J} - 30\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{KL} = \left(-73.2\vec{i} + 181.3\vec{J} - 42.3\vec{K}\right)\text{cm}$$

1.2. Los ángulos directores del vector: $\overrightarrow{R_1} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

$$\alpha = 53.93° \qquad \beta = 69.19° \qquad \gamma = 43.46°$$

$$\overrightarrow{R_1} = \left[-\left(-45.26\vec{i} - 90.63\vec{K}\right) + 2\left(12.5\vec{i} - 25\vec{J} + 41.45\vec{K}\right)\right]\text{cm}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \left(67.26\vec{i} + 40.63\vec{J} + 82.9\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \sqrt{(67.26)^2 + (40.63)^2 + (82.9)^2}$$

$$\overrightarrow{R_1} = 114.2\,\text{cm}$$

$$\overrightarrow{\mu_{R_1}} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{J} + \cos\gamma\vec{K}$$

$$\overrightarrow{\mu_{R_1}} = \frac{\text{R}_1}{\text{R}_1} = \frac{\left(67.26\vec{i} + 40.63\vec{J} + 82.9\vec{K}\right)\text{cm}}{114.2\,\text{cm}}$$

$$\overrightarrow{\mu_{R_1}} = 0.5888\vec{i} + 0.3558\vec{J} + 0.7259\vec{K}$$

$$\cos\alpha = 0.5888 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0.5888) \Rightarrow \alpha = 53.93°$$

$$\cos\beta = 0.3552 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.3558) \Rightarrow \beta = 69.16°$$

$$\cos\gamma = 0.7259 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0.7259) \Rightarrow \gamma = 43.46°$$

1.3. En ángulo entre los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ es:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}}{(CD)(EF)}$$

$$\overrightarrow{CD} = 12.5\vec{i} - 25\vec{J} + 41.45\vec{K}$$

$$\overrightarrow{EF} = 0\vec{i} + 70.5\vec{J} - 25.65\vec{K}$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = 12.5(0) + (-25)(70.5) + (41.45)(-25.65)$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = -1762.5 - 1063.2 = -2825.7$$

$$\cos\theta = \frac{-2825.7}{(50)(75)} = -0.75352$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0.75352)$$

$$\theta = 138.9°$$

1.4. El vector proyección de $\overrightarrow{IJ}$ en la dirección de $\overrightarrow{GH}$ es:

$$\overrightarrow{IJ}_{GH} = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GH}}{GH^2}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \left(-50\vec{i} + 15\vec{J} - 30\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{GH} = \left(-46\vec{i} + 38.6\vec{J} + 0\vec{K}\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GH} = (-50)(-46) + (15)(38.6) + (30)(0) = 28.79$$

$$GH^2 = (60\,\text{cm})^2 = 3600\,\text{cm}^2$$

Luego:

$$\overrightarrow{IJ}_{GH} = \frac{28.79 \cdot \left(-46i + 38.6J + 0K\right)}{3600} = 0.8\left(-46i + 38.6J + 0K\right)\text{cm}$$

$$\overrightarrow{IJ}_{GH} = \left(-36.8i + 30.88J + 0K\right)\text{cm}$$

1.5. Un vector perpendicular tanto a $\overrightarrow{IJ}$ como a $\overrightarrow{KL}$ es:

$$\vec{R} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KL} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -50 & 15 & -30 \\ -73.2 & 181.3 & -42.3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{i} \begin{vmatrix} 15 & -30 \\ 181.3 & -42.3 \end{vmatrix} - \vec{J} \begin{vmatrix} -50 & -30 \\ -73.2 & -42.3 \end{vmatrix} + \vec{K} \begin{vmatrix} -50 & 15 \\ -73.2 & 181.3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} = \left[(15)(-42.3) - (-30)1(81.3)\right] i - \left[(-50)(-42.3) - (30)(-73.2)\right] J$$

$$+ \left[(-50)(181.3) - (15)(-73.2)\right] K$$

$$\vec{R} = \left(4804.5i + 81J - 7967K\right) \text{cm}^2$$

2. Dados los siguientes vectores:

a. $\overrightarrow{KL} \rightarrow K(5,-3,7)\text{m} \;;\quad L(-3,4,2)\text{m}$

b. $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 10\text{m} \;;\; \text{N}20°\text{E} \quad y \quad \hat{e} = 65°$

c. $\left|\overrightarrow{OP}xz\right| = 6.5\text{m} \;;\quad 230° \text{ con} z$

d. $\left|\overrightarrow{QR}\right| = 3.5\text{m} \;;\quad \overrightarrow{\mu_{QR}} = -0.45\vec{i} - c\vec{J} + 0.35\vec{K}$

e. $\left|\overrightarrow{ST}\right| = 12\text{m} \;;\quad 125° \text{ con} y$

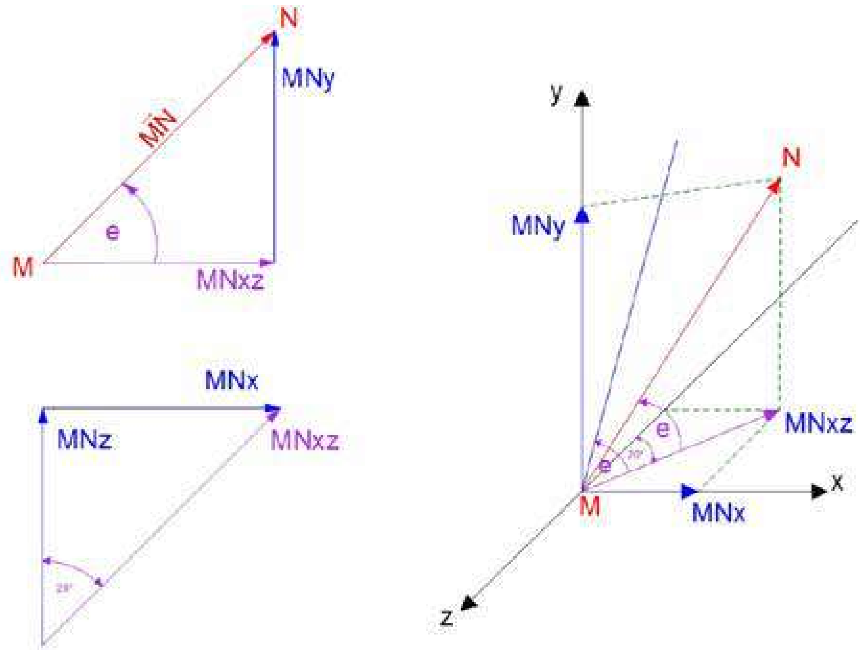
2.1. Los vectores dados en función de $(\vec{i}, \vec{J}, \vec{K})$

a. $KL: \; K(5,-3,7)\text{m}; L(-3,4,2)\text{m}$

$$KL = \left[(L) - (K)\right] = \left[(-3,4,2) - (5,-3,7)\right] \text{m}$$

$$KL = \left(-8i + 7J - 5K\right) \text{m} \Rightarrow \text{ en vectores base}$$

b. ç $\left|MN\right| = 10\text{m} \;;\; \text{N}20°\text{E} \;\; \text{y} \;\; \hat{e} = 65°$



$MNy = MN \cdot \operatorname{sen}\hat{e}$

$MNy = 10\operatorname{sen}65^{o}$

$MNy = 9.063m$

$MNxz = MN\cos\hat{e}$

$MNxz = 10\cos65^{o}$

$MNxz = 4.226m$

$MNx = MNxz\operatorname{sen}20^{o}$

$MNx = 4.226\operatorname{sen}20^{o}$

$MNx = 1.4\ m$

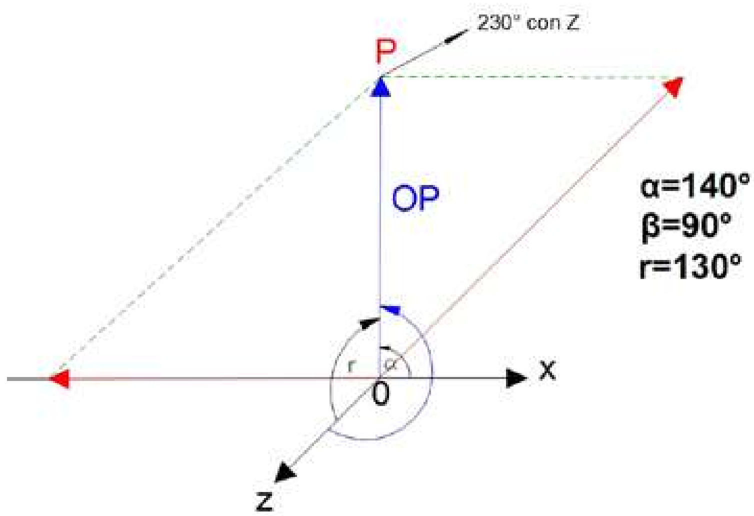
$MNz = MNxz\cos20^{o}$

$MNz = 4.226\cos20^{o}$

$MNz = -4m$

$\overrightarrow{MN}=(1.4\vec{i}+9\vec{J}-4\vec{K})m \Longrightarrow$ En vectores base

c. $\left|\overrightarrow{OPxz}\right| = 6.5\,\text{m}$; $230°$ con z



$$\overrightarrow{OP} = OPx\vec{i} + OPy\vec{J} + OPz\vec{K}$$

$$\text{OPx} = \text{OP}\cos\alpha$$

$$OPx = 6.5\cos 140° = -5\,\text{m}$$

$$OPy = OP\cos\beta$$

$$OPy = 6.5\cos 90° = 0\,\text{m}$$

$$OPz = OP\cos\gamma = 6.5\cos 130° = -4.2\,\text{m}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-5\vec{i} + 0\vec{J} - 4.2\vec{K}\right)\text{m} \Rightarrow \text{En vectores base}$$

d. $\left|\overrightarrow{QR}\right| = 3.5\,\text{m}$; $\overrightarrow{\mu_{QR}} = -0.45\vec{i} - c\vec{J} + 0.35\vec{K}$

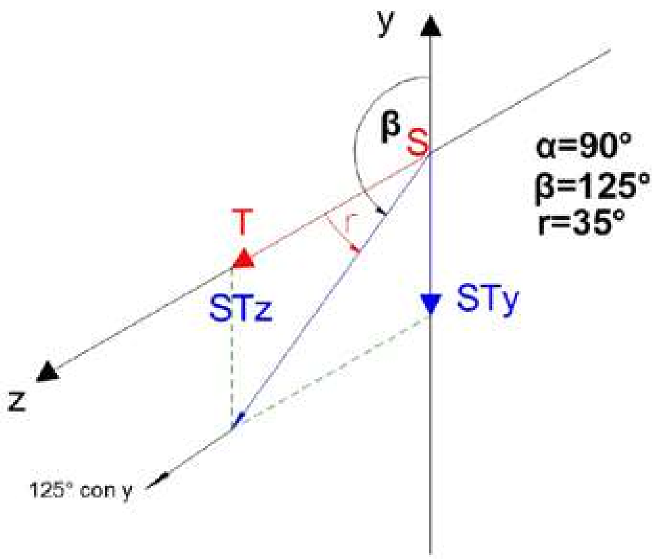
$$\left|\mu_{QR}\right| = 1^2 = (0.45)^2 + (-c)^2 + (0.35)^2$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{1 - (0.45)^2 - (0.35)^2} \Rightarrow c = 0.82$$

$$\overrightarrow{QR} = \left|\overrightarrow{QR}\right|\overrightarrow{\mu_{QR}} = 3.5\,\text{m}\left(-0.45\vec{i} - 0.82\vec{J} + 0.35\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{QR} = \left(-1.6\vec{i} - 2.9\vec{J} + 1.2\vec{K}\right)\text{m} \Rightarrow \text{En vectores base}$$

e. $\left|\overrightarrow{ST}\right| = 12\,\text{m} \;\; ; \;\; 125°\,\text{con}\, y$



$$\overrightarrow{ST} = STx\vec{i} + STy\vec{J} + STz\vec{K}$$
$$STx = ST\cos\alpha = 12\cos 90° = 0$$
$$STy = ST\cos\beta = 12\cos 125° = -6.9\,\text{m}$$
$$STz = ST\cos\gamma = 12\cos 35° = 9.8\,\text{m}$$
$$\overrightarrow{ST} = \left(0\vec{i} - 6.9\vec{J} + 9.8\vec{K}\right)\text{m} \Rightarrow \text{vectores base}$$

2.2. Los ángulos directores del vector: $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{OP} \text{ x } \overrightarrow{ST}$

$$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{ST} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -5 & 0 & -4.2 \\ 0 & -6.9 & 9.8 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -4.2 \\ -6.9 & 9.8 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} -5 & -4.2 \\ 0 & 9.8 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6.9 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \left(-29i + 49J + 34.5K\right)$$

$$\vec{\mu}_{R_1} = \frac{\vec{R}_1}{R_1} = \frac{\left(-29\vec{i} + 49\vec{J} + 34.5\vec{K}\right)}{\sqrt{(29)^2 + (49)^2 + (34.5)^2} \rightarrow 66.6}$$

$$\vec{\mu}_{R_1} = -0.435\vec{i} + 0.736\vec{J} + 0.518\vec{K}$$

$$\cos\alpha = -0.435 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0.435) \Rightarrow \alpha = 115.8°$$

$$\cos\beta = 0.736 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.736) \Rightarrow \beta = 42.6°$$

$$\cos\gamma = 0.518 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0.518) \Rightarrow \gamma = 5.8°$$

2.3 El ángulo entre el vector $\overrightarrow{\text{KL}}$ y el vector $\overrightarrow{\text{MN}}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN}}{(KL)(MN)}$$

$$\overrightarrow{KL} = \left(-8\vec{i} + 7\vec{J} - 5\vec{K}\right) \rightarrow KL = \sqrt{(8)^2 + (7)^2 + (5)^2} = 11.75$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(1.4\vec{i} + 9\vec{J} - 4\vec{K}\right) \rightarrow MN = 10$$

$$\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN} = (-8)(1.4) + (7)(9) + (-5)(-4)$$

$$\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN} = 71.8$$

$$\cos\theta = \frac{71.8}{11.75\,(10)} = 0.6112 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0.6112)$$

$$\theta = 52.3\,°$$

2.4 Un vector perpendicular tanto a $\overrightarrow{\text{QR}}$ como a $\overrightarrow{\text{ST}}$

$$\vec{L} = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{ST} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -1.6 & -2.9 & 1.2 \\ 0 & -6.9 & 9.8 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2.9 & 1.2 \\ -6.9 & 9.8 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} -1.6 & 1.2 \\ 0 & 9.8 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} -1.6 & -2.9 \\ 0 & -6.9 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = [(-2.9)(9.8)-(1.2)(-6.9)]\vec{i} - [(-1.6)(9.8)-0]\vec{J} + [(-1.6)(-6.9)-0]\vec{K}$$

$$\vec{L} = (-20.14\vec{i} + 15.68\vec{J} + 11.04\vec{K})\text{m}^2$$

2.5. El vector proyección de $\overrightarrow{\text{MN}}$ en la dirección de $\overrightarrow{\text{OP}}$

$$\overrightarrow{MN}_{OP} = \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}}{OP^2}$$

$$\overrightarrow{MN} = (1.4\vec{i} + 9\vec{J} - 4\vec{K})$$

$$\overrightarrow{OP} = (-5\vec{i} + 0\vec{J} - 4.2\vec{K})$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OP} = [(1.4)(-5) + 9(0) + (-4)(-4.2)] = 9.8$$

$$\overrightarrow{MN}_{OP} = \frac{9.8}{(6.5)^2}\cdot(-5\vec{i} + 0\vec{J} - 4.2\vec{K})$$

$$\overrightarrow{MN}_{OP} = (-1.16\vec{i} + 0\vec{J} - 0.974\vec{K})\text{m}$$

2.6. En área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{\text{KL}}$ y $\overrightarrow{\text{ST}}$

$$A = \left|\overrightarrow{KL}\times\overrightarrow{ST}\right|$$

$$\overrightarrow{KL}\times\overrightarrow{ST} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -8 & 7 & -5 \\ 0 & -6.9 & 9.8 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{KL}\times\overrightarrow{ST} = \vec{i}\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -6.9 & 9.8 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 0 & 9.8 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 0 & -6.9 \end{vmatrix}$$

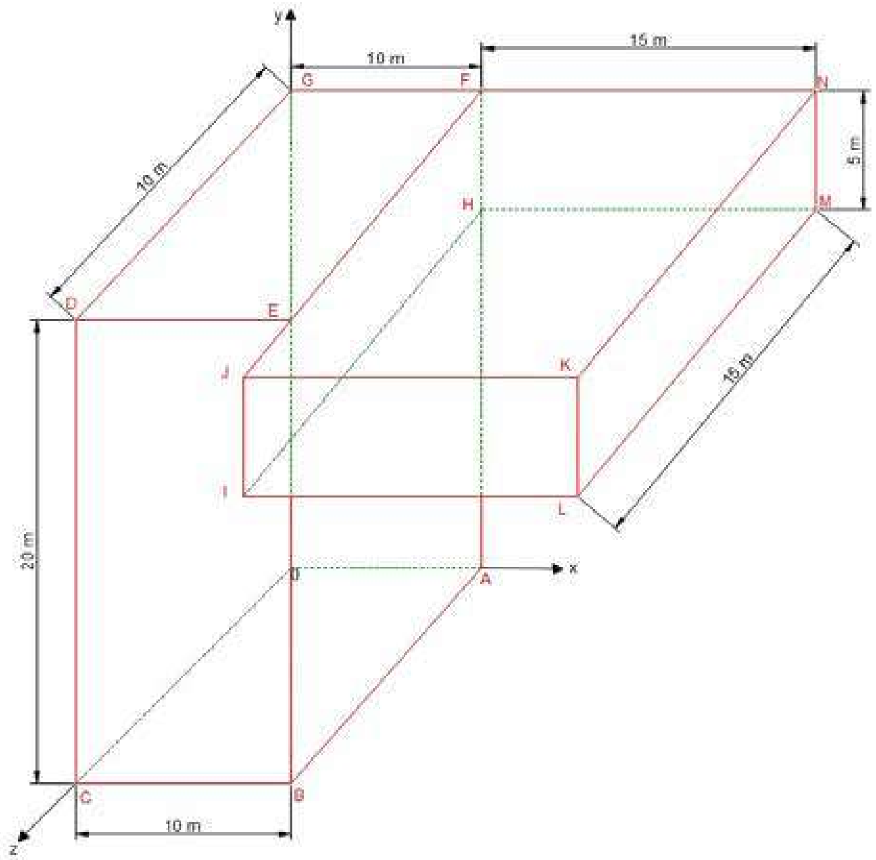
$$\overrightarrow{KL}\times\overrightarrow{ST} = [(7)(9.8)-(-5)(-6.9)]\vec{i} - [(-8)(9.8)-0]\vec{J} + [(-8)(-6.9)-0]\vec{K}$$

$$\overrightarrow{KL}\times\overrightarrow{ST}\ (34.1\vec{i} + 78.4\vec{J} + 55.2\vec{K})$$

$$A = \sqrt{(34.1)^2(78.4)^2(55.2)^2}$$

$$A = 101.8\text{m}^2$$

3. Dada la siguiente figura



3.1. Los vectores que se indican en función de $\vec{i}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ son:

$$\overrightarrow{LG} = \left(-25\vec{i} + 5\vec{J} - 15\vec{K}\right)\text{m} \quad \overrightarrow{EN} = \left(15\vec{i} + 0\vec{J} - 10\vec{K}\right)\text{m}$$

$$\overrightarrow{HD} = \left(-10\vec{i} + 5\vec{J} + 10\vec{K}\right)\text{m} \quad \overrightarrow{FB} = \left(0\vec{i} - 20\vec{J} + 10\vec{K}\right)\text{m}$$

$$\overrightarrow{CL} = \left(25\vec{i} + 15\vec{J} + 5\vec{K}\right)\text{m} \quad \overrightarrow{DH} = \left(10\vec{i} - 5\vec{J} - 10\vec{K}\right)\text{m}$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(25\vec{i} + 15\vec{J} + 0\vec{K}\right)\text{m} \quad \overrightarrow{MD} = \left(-25\vec{i} + 5\vec{J} + 10\vec{K}\right)\text{m}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \left(0\vec{i} + 20\vec{J} + 15\vec{K}\right)\text{m} \quad \overrightarrow{KC} = \left(-25\vec{i} - 20\vec{J} - 5\vec{K}\right)\text{m}$$

Solución:

$$\overrightarrow{FB} = \left[(B)-(F)\right] = \left[(10{,}0{,}10)-(10{,}20{,}0)\right] = \left(0\vec{i} - 20\vec{J} + 10\vec{K}\right)\mathrm{m}$$

$$\overrightarrow{DH} = \left[(H)-(D)\right] = \left[(10{,}15{,}0)-(0{,}20{,}10)\right] = \left(10\vec{i} - 5\vec{J} - 10\vec{K}\right)\mathrm{m}$$

$$\overrightarrow{MD} = \left[(D)-(M)\right] = \left[(0{,}20{,}10)-(25{,}15{,}0)\right] = \left(-25\vec{i} + 5\vec{J} + 10\vec{K}\right)\mathrm{m}$$

Y así sucesivamente, como también el vector $\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ es el vector que inicia en M y termina en D. Se puede considerar directamente las coordenadas en x, y, z, tomando a M como origen y M extremo así: MD = MNGD, $\overrightarrow{\mathrm{MD}} = (-25\vec{\mathrm{i}} + 5\vec{\mathrm{J}} + 10\vec{\mathrm{K}})$, obteniendo el mismo resultado directamente. Este procedimiento se consideró obteniendo los resultados que se indican.

3.2. El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{\mathrm{LG}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ (θ)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{LG}\cdot\overrightarrow{HD}}{(LG)(HD)} = \frac{125}{(29.58)(15)} = 0.2817219 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{LG} = \left(-25\vec{i} + 5\vec{J} - 15\vec{K}\right)m \rightarrow LG = \sqrt{(25)^2 + (5)^2 + (15)^2} = 29.58$$

$$\overrightarrow{HD} = \left(-10\vec{i} + 5\vec{J} + 10\vec{K}\right)m \rightarrow HD = \sqrt{(10)^2 + (5)^2 + (10)^2} = 15$$

$$\overrightarrow{LG}\cdot\overrightarrow{HD} = \left[(-25)(-10) + (5)(5) + (-15)(10)\right] = 125$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.2817219) \Rightarrow \theta = 73.6°$$

3.3. El vector de proyección de $\overrightarrow{\text{FB}}$ en la dirección de $\overrightarrow{\text{CL}}$.

$$\overrightarrow{FB}_{CL} = \frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{CL}\cdot\overrightarrow{CL}}{CL^2} = \frac{-250}{875}\left(25\vec{i} + 15\vec{J} + 5\vec{K}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{FB} = \left(0\vec{i} - 20\vec{J} + 10\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{CL} = \left(25\vec{i} + 15\vec{J} + 5\vec{K}\right) \to CL^2 = \left(25\right)^2 + 15^2 + 5^2 = 875$$

$$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{CL} = \left[0\left(25\right) + \left(-20\right)\left(15\right) + \left(10\right)\left(5\right)\right] = -250$$

$$\overrightarrow{FB}_{CL} = \left(-7.14\vec{i} - 4\ 28\vec{J} - 1.43\vec{K}\right)\text{m}$$

3.4. Un vector perpendicular tanto a $\overrightarrow{\text{DH}}$ como a $\overrightarrow{\text{OM}}$.

$$\vec{T} = \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ 10 & -5 & -10 \\ 25 & 15 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 25 & 0 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 25 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T} = \left[0 - \left(-10\right)\left(15\right)\right]\vec{i} - \left[0 - \left(-10\right)\left(25\right)\right]\vec{J} + \left[\left(10\right)\left(15\right) - \left(-5\right)\left(25\right)\right]\vec{K}$$

$$\vec{T} = \left(150i - 250J + 275K\right)\text{m}^2$$

3.5. El área del paralelogramo formado entre los vectores $\overrightarrow{MD}$ y $\overrightarrow{AJ}$.

$$A = \left|\overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{AJ}\right| = \sqrt{(125)^2 + (375)^2 + (500)^2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{AJ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -25 & 5 & 10 \\ 0 & 20 & 15 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} -25 & 10 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} -25 & 5 \\ 0 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{AJ} = [(5)(15)-(10)(20)]\vec{i} - [(-25)(15)-(10)(0)]\vec{J} + [(-25)(20)-(5)(0)]\vec{K}$$

$$\overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{AJ} = -125i + 375J - 500K$$

$$A = 637.4\,\text{m}^2$$

3.6. Los ángulos directores del vector: $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{KC}$.

$$\overrightarrow{\mu_{R_1}} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{J} + \cos\gamma\vec{J}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \left(15\vec{i} - 10\vec{K}\right) - \left(-25\vec{i} - 20\vec{J} - 5\vec{K}\right) = \left(40\vec{i} + 20\vec{J} - 5\vec{K}\right)\text{m}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \sqrt{(40)^2 + (20)^2 + (5)^2} \Rightarrow \overrightarrow{R_1} = 45\,\text{m}$$

$$\overrightarrow{\mu_{R_1}} = \frac{\overrightarrow{R_1}}{R_1} = \frac{\left(40\vec{i} + 20\vec{J} - 5\vec{K}\right)}{45} \Rightarrow \overrightarrow{\mu_{R_1}} = 0.889i + 0.444J - 0.111K$$

$$\cos\alpha = 0.889 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0.889) \Rightarrow \alpha = 27.3°$$

$$\cos\beta = 0.444 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.444) \Rightarrow \beta = 63.6°$$

$$\cos\gamma = 0.111 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0.111) \Rightarrow \gamma = 96.4°$$

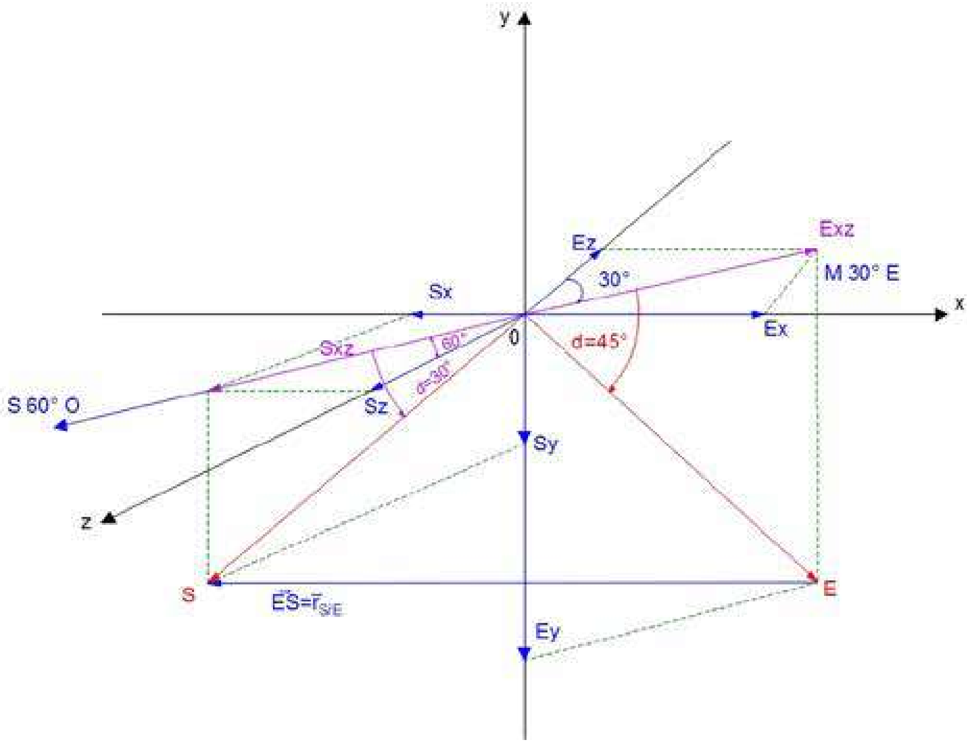
4. Se desea cavar un túnel a través de una montaña, para lo cual se determinan las posiciones de E (entrada del túnel) y S (salida del túnel) respecto a un punto común "O". La posición de "E" respecto a "O" es; N30°E y forma un ángulo de presión de 45° y tiene una longitud de 12km. Y la posición de "S" respecto a "O" es S60°O formando un ángulo de depresión de 30° y tiene una longitud de 15 km. Determinar:

Solución.

Datos:

$$r_E = OE = \left(12\text{km}, \text{N}30°\text{E},\ d = 45°\right)$$

$$r_s = OS = \left(12\text{km}, \text{S}60°\text{O},\ d = 30°\right)$$



4.1 El vector posición de la salida (S) del túnel respecto a la entrada (E) en términos de $\vec{i}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ es:

$$\overrightarrow{r_S}/_E = \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_E}$$

$$\overrightarrow{r_E} = Ex\vec{i} + Ey\vec{J} + Ez\vec{K}$$

$$Exz = E\cos d = 12\cos 45° = 8.485\,\text{km}$$

$$Ey = E\,\text{sen}\,d = 12\,\text{sen}\,45° = -8.485\,\text{km}$$

$$Ex = Exz\,\text{sen}\,30° = 8.485\,\text{sen}\,30° = 4.243\,\text{km}$$

$$Ez = Exz\cos 30° = 8.485\cos 30° = -7.348\,\text{km}$$

$$\vec{r_E} = \left(4.243\vec{i} - 8.485\vec{J} - 7.348\vec{K}\right)\text{km}$$

$$\vec{r_S} = Sx\vec{i} + Sy\vec{J} + Sz\vec{K}$$

$$Sxz = S\cos d = 15\cos 30° = 13\,\text{km}$$

$$Sy = S\,sen\,d = 15\,\text{sen}\,30° = -7.5\,\text{km}$$

$$Sx = Sxz\,\text{sen}\,60° = 13\,\text{sen}\,60° = -11.26\text{km}$$

$$Sz = Sxz\cos 60° = 13\cos 60° = 6.5\,\text{km}$$

$$\vec{r_S} = \left(-11.26\vec{i} - 7.5\vec{J} + 6.5\vec{K}\right)\text{km}$$

$$\vec{r_S}/_E = \overrightarrow{ES} = \left(-11.26\vec{i} - 7.5\vec{J} + 6.5\vec{K}\right) - \left(4.243\vec{i} - 8.485\vec{J} - 7.348\vec{K}\right)$$

$$\vec{r_S}/_E = \overrightarrow{ES} = \left(-15.5\vec{i} + 0.985\vec{J} + 13.85\vec{K}\right)\text{km}$$

4.2. La longitud del túnel es:

$$ES = \sqrt{(15.5)^2 + (0.985)^2 + (13.85)^2} \Rightarrow ES = 20.61 \text{ km}$$

4.3. El ángulo que forma los radios vectores ($\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OS}$) es:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OE}}{(OS)(OE)} = \frac{(-11.26)(4.243) + (-7.5)(-8.485) + (6.5)(-7.348)}{(15)(12)} = \frac{-31.9}{180}$$

$$\cos\theta = -0.17722 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.17722) \Rightarrow \theta = 100.2°$$

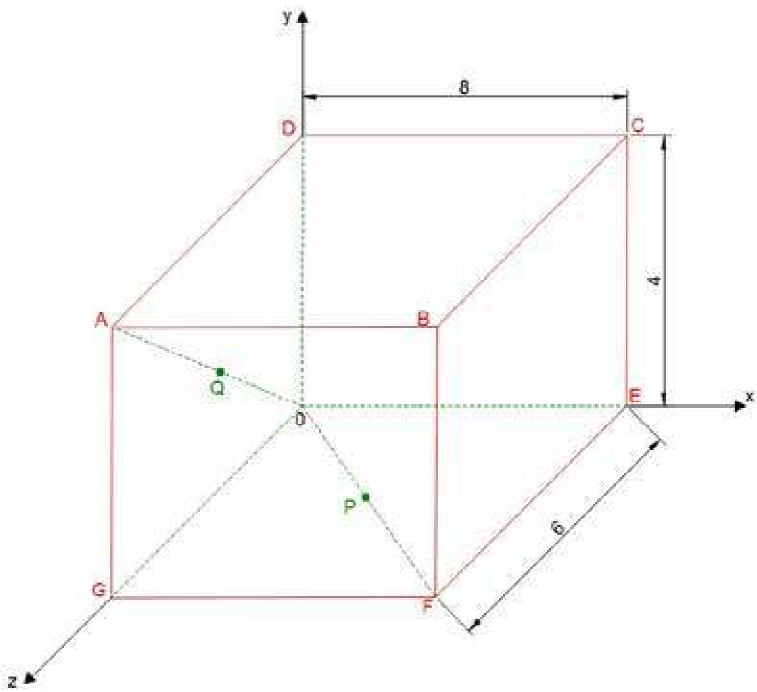
5. En el prisma de la figura adjunta si P y Q son los puntos medios de las diagonales OF y OA determinar:

a. La posición de P respecto a Q en términos de ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

b. Los ángulos directores del vector $\vec{R}$, siendo: $\vec{R} = \frac{1}{2} QB - 3DE + GB$

c. El ángulo entre $\overrightarrow{DF}$ y $\overrightarrow{EA}$.

d. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{DB}$.



Datos: P y Q = puntos medios de OF y OA.

$$\overrightarrow{OP} = r_P = \left(4\vec{i} + 0\vec{J} + 3\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = r_Q = \left(0\vec{i} + 2\vec{J} + 3\vec{K}\right)$$

5.1 $\quad r_{P/Q} = ?$

5.2 $\quad$ # s Directores :

α, β, γ de $\vec{R}$

$$R = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} - 3\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GB}$$

5.3 $\quad \theta = ?\ \ \overrightarrow{DF}$ y $\overrightarrow{EA}$

5.4 $\quad L \perp \overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{DB}$

$$\overrightarrow{EG} = \left(-8\vec{i} + 0\vec{J} + 6\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{DB} = \left(8\vec{i} + 0\vec{J} + 6\vec{K}\right)$$

$$\vec{R} =$$

$$\overrightarrow{QB} = \left[(B) - (Q)\right]$$

$$\overrightarrow{QB} = \left[(8,4,6) - (0,2,3)\right]$$

$$\overrightarrow{QB} = \left(8i + 2J + 3K\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = \left[(E) - (D)\right]$$

$$\overrightarrow{DE} = \left[(8,0,0) - (0,4,0)\right]$$

$$\overrightarrow{DE} = \left(8\vec{i} - 4\vec{J} + 0\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{GB} = \left[(B) - (G)\right]$$

$$\overrightarrow{GB} = \left[(8,4,6) - (0,0,6)\right]$$

$$\overrightarrow{GB} = \left(8\vec{i} + 4\vec{J} + 0\vec{K}\right)$$

5.1. La posición de P respecto a Q (en términos de $\vec{i}, \vec{J}, \vec{K}$) es:

$$\vec{r_P} = \overrightarrow{QP} = \vec{r_P} - \vec{r_Q} = \left(4\vec{i} + 0\vec{J} + 3\vec{K}\right) - \left(0\vec{i} + 2\vec{J} + 3\vec{K}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{P/Q}} = \left(4\vec{i} - 2\vec{J} + 0\vec{K}\right)$$

5.2. Los ángulos directores el vector $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \frac{1}{2}\left(8\vec{i} + 2\vec{J} + 3\vec{K}\right) - 3\left(8\vec{i} - 4\vec{J}\right) + \left(8\vec{i} + 4\vec{J}\right)$$

$$\vec{R} = \left(-12\vec{i} + 17\vec{J} + 1.5\vec{K}\right) \rightarrow\ R = \sqrt{(12)^2 + (17)^2 + (1.5)^2} = 20.86$$

$$\vec{\mu_R} = \frac{R}{R} = \frac{\left(-12\vec{i} + 17\vec{J} + 1.5\vec{K}\right)}{20.86} = 0.5752\vec{i} + 0.8115\vec{J} + 0.0719\vec{K}$$

$$\cos\alpha = -0.5752 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0.5752) \Rightarrow \alpha = 125.1°$$

$$\cos\beta = 0.815 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.815) \Rightarrow \beta = 35.4°$$

$$\cos\gamma = 0.0719 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0.0719) \Rightarrow \gamma = 87.9°$$

5.3. El ángulo entre $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$:

$$\cos\,\theta = \frac{DF \cdot EA}{(DF)(EA)} = \frac{\left(8i - 4J + 6K\right)\cdot\left(-8i - 4J + 6K\right)}{\sqrt{(8)^2 + (4)^2 + (6)^2}\cdot\sqrt{(8)^2 + (4)^2 + (6)^2}} = \frac{-12}{116} = -\frac{3}{29}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{29}\right) \Rightarrow \theta = 95.9\ °$$

5.4. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$:

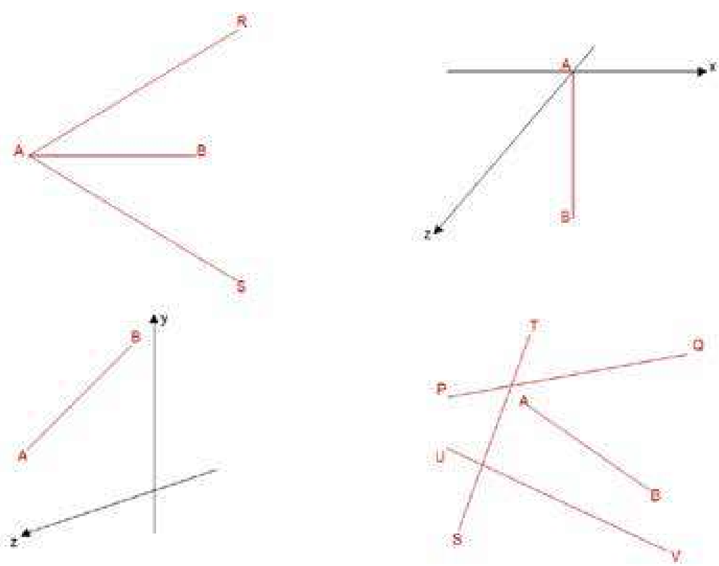
$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ -8 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{J}\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \vec{K}\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{EG} \times \overrightarrow{DB} = 96J$$

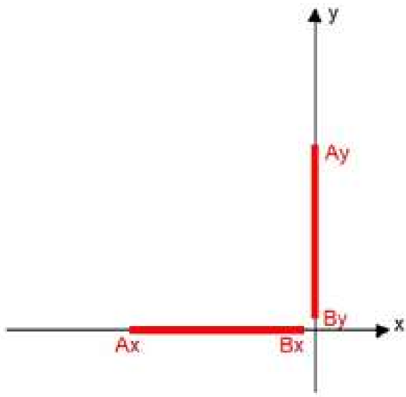
6.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

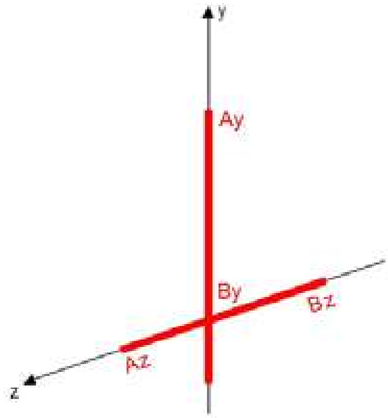
Se presentan los siguientes ejercicios propuestos [11] [13].

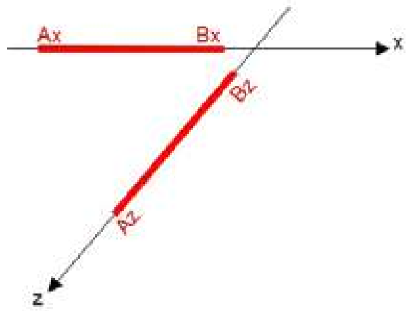
1. Sobre los gráficos adjuntos, halle gráficamente las proyecciones del segmento AB sobre los ejes indicados. Complete poniendo la respectiva notación y señale los ángulos rectos.

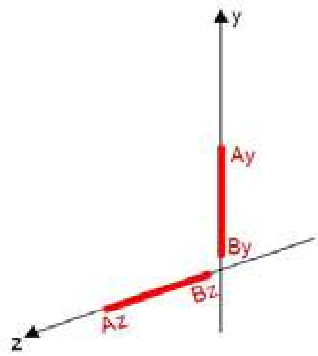


2. Encuentre el segmento de recta que ha dado origen a las siguientes proyecciones:









3. Dados los siguientes segmentos de recta: determinar gráfica y analíticamente las proyecciones sobre los ejes correspondientes. No olvide los signos que les corresponden.

a) $Ayz = 20$ m $\sphericalangle$ 175° con y

e) $Bxy = 30$ cm $\sphericalangle$ 135° con x

b) $Cxy = 15$ m $\sphericalangle$ 20° con y

d) $Dyz = 25$ cm $\sphericalangle$ 310° con z

c) $Exz = 10$ m $\sphericalangle$ 265° con z

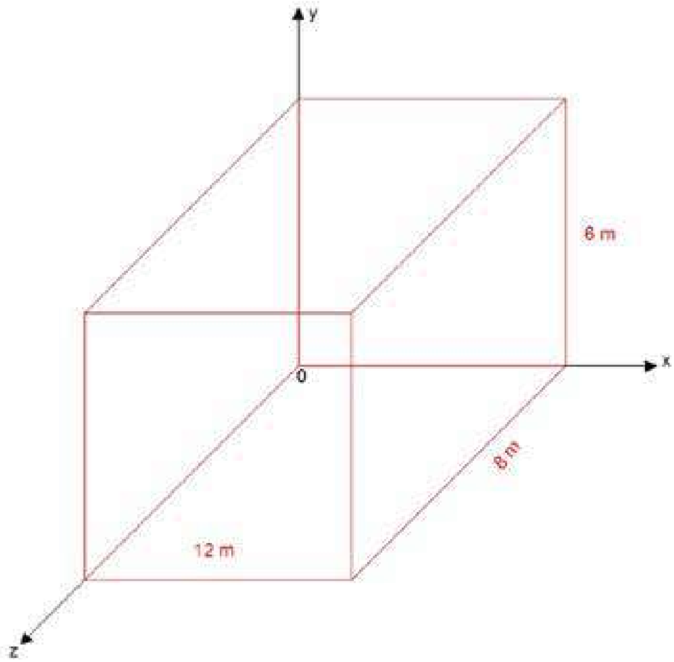
f) F = 40 cm NO

d) G = 35 m S15°E

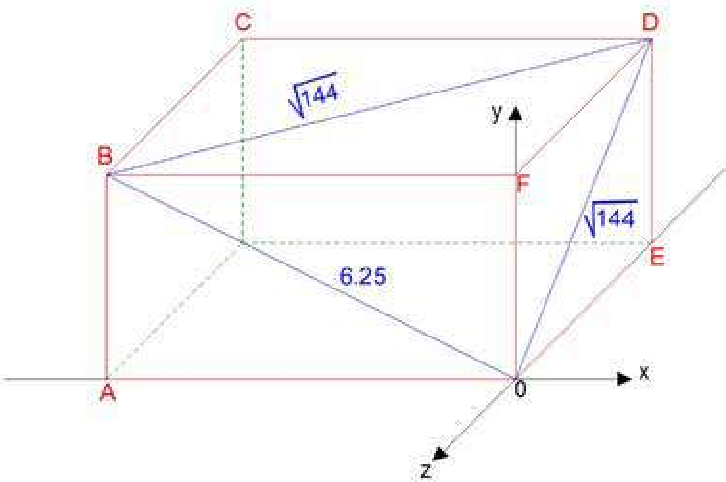
g) H = 50 cm O 25°S

4. En la caja de figura adjunta, encuentre la longitud de las diagonales DXY, DXZ, DXY.

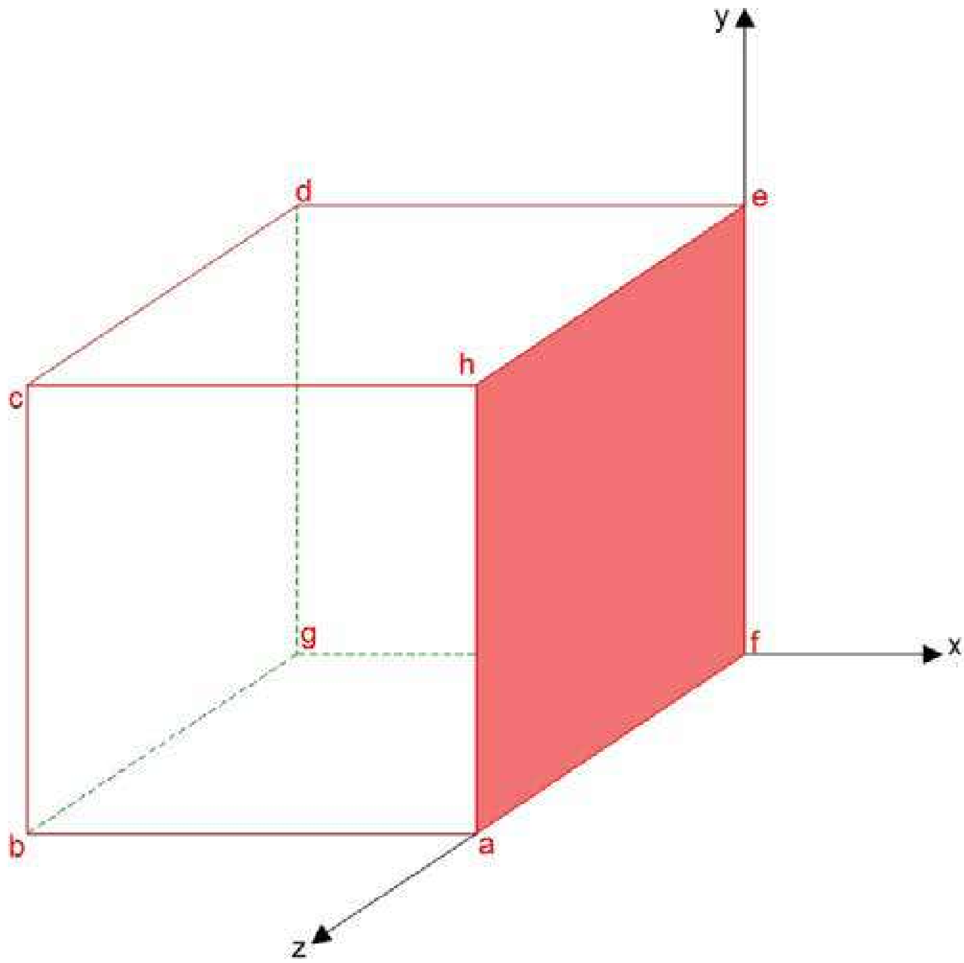
D = diagonal



5. Paralafiguraadjuntaescribalascoordenadasdelospuntos:A, B, C, D, E con respecto al sistema XYZ levantado en el origen "O".



6. La arista del cubo de la figura adjunta mide 16 cm. Escriba las coordenadas de los puntos; a, b, c, d, e, f, g respecto a XYZ (punto F).



Además, encuentre la longitud de: e a c h e. Qué ángulo existe entre:

ea y el eje +z

ec y el eje +y

ca y el plano xz

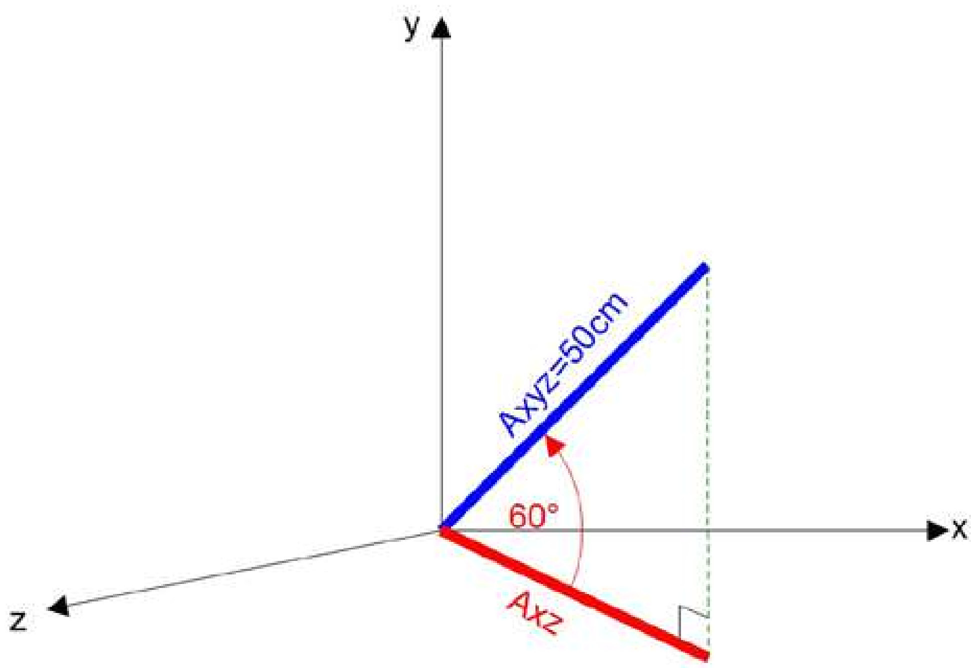
cg y el plano xz; ge y el eje -x.

7. Las proyecciones sobre los ejes son: Ax = -3 cm y Az = 4 cm. Determine la longitud del segmento Axz y el ángulo que forma con el eje Z.

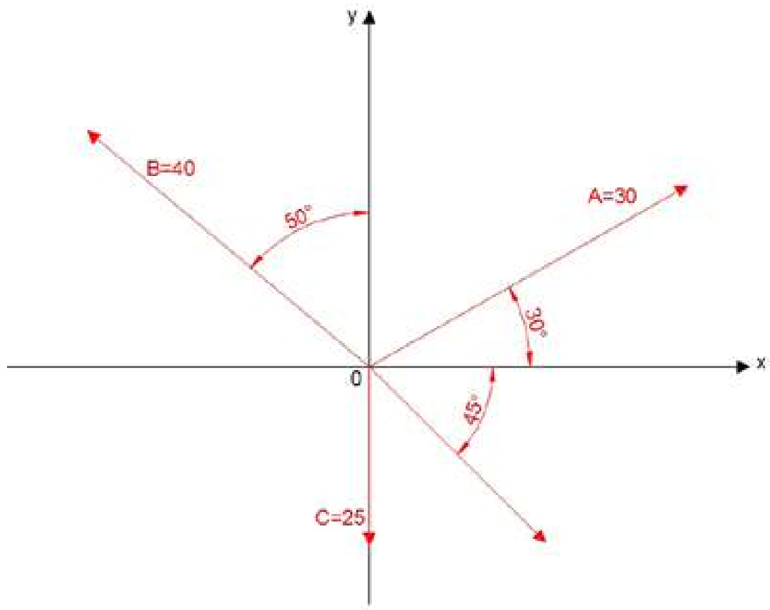
8. Conociendo las proyecciones Ay = 5 cm y Az = 12 cm. Encuentre los ángulos directores y la longitud del segmento AYZ.

9. Una línea en el espacio proyecta simultáneamente las sombras de los planos XY, XZ, ABxz= 16 cm y forma un ángulo de 30° con el eje Z; asmismo ABxy forma un ángulo de 40° con el eje X. Encuentre la longitud de las proyecciones sobre los ejes X, Y, Z.

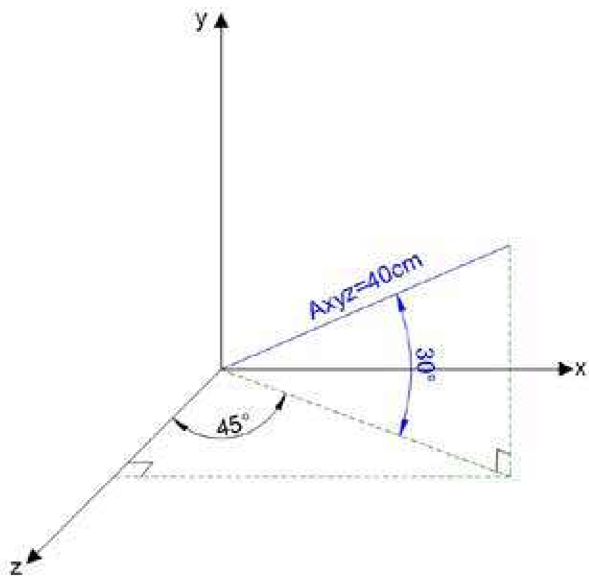
10. Una línea de 50 cm de longitud se halla en el espacio y proyecta perpendicularmente una sombra sobre el plano XZ. La sombra y la línea forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es la longitud de la sombra y de la proyección sobre el eje Y?



11. Dados los vectores A, B, C, D de la figura adjunta. Encontrar gráfica y analíticamente el vector suma, por cualquier método.



12. Dos triángulos rectángulos se ubican como indica la figura adjunta. Sobre la base de los datos indicados halle las proyecciones sobre los ejes X, Y, Z.

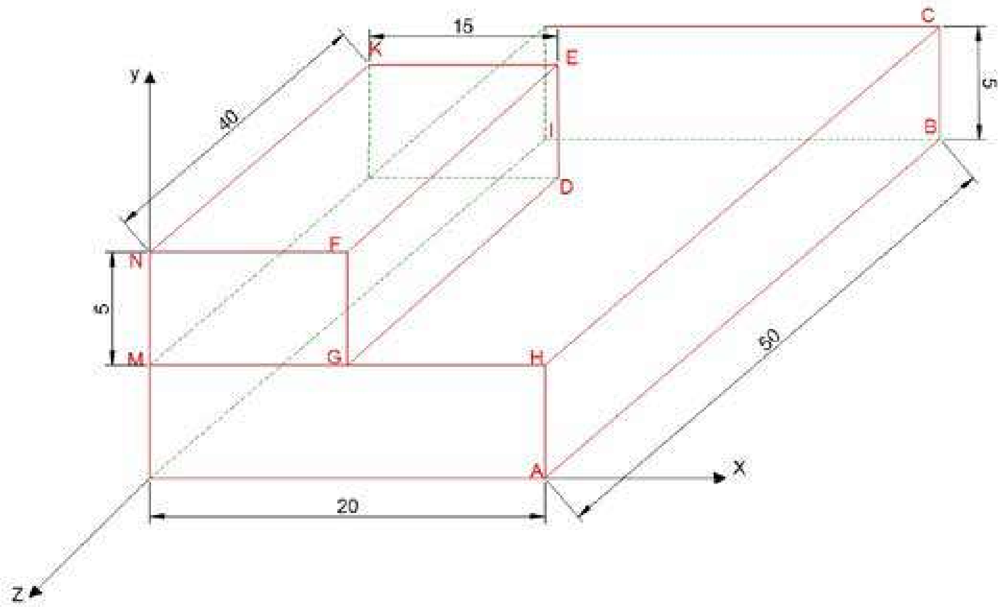


13. En la figura adjunta, determine gráfica y analíticamente los siguientes vectores.

$$\overrightarrow{R1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AB}$$

13.1. $\overrightarrow{R2} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{GB}$

$$\overrightarrow{R3} = -2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{BN}$$



13.2. Los vectores expresados en coordenadas rectangulares expréselos en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

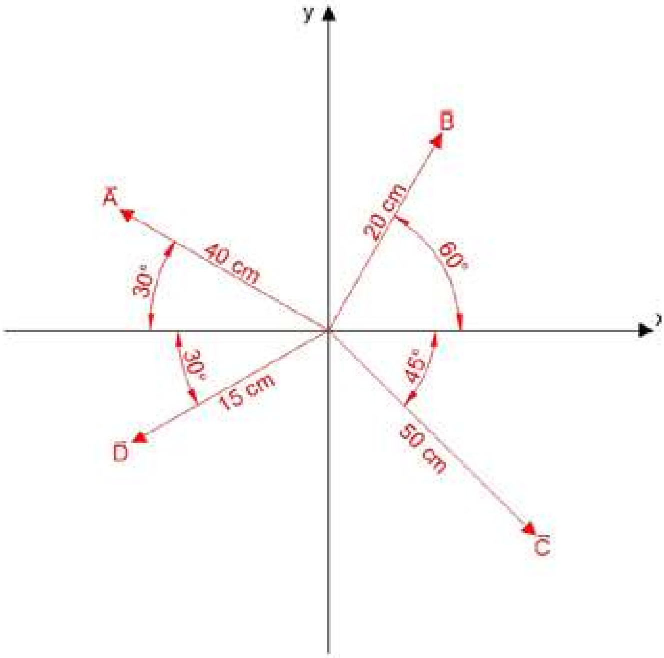
14. Un vector de 8 cm está en la dirección NO ($\overrightarrow{A}$) y el otro vector $\overrightarrow{B}$ de 6 cm en la dirección de S30°E. Encuentre analíticamente $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$.

15. Dados los vectores de la figura adjunta. Encuentre gráfica y analíticamente la longitud y dirección de los vectores R.

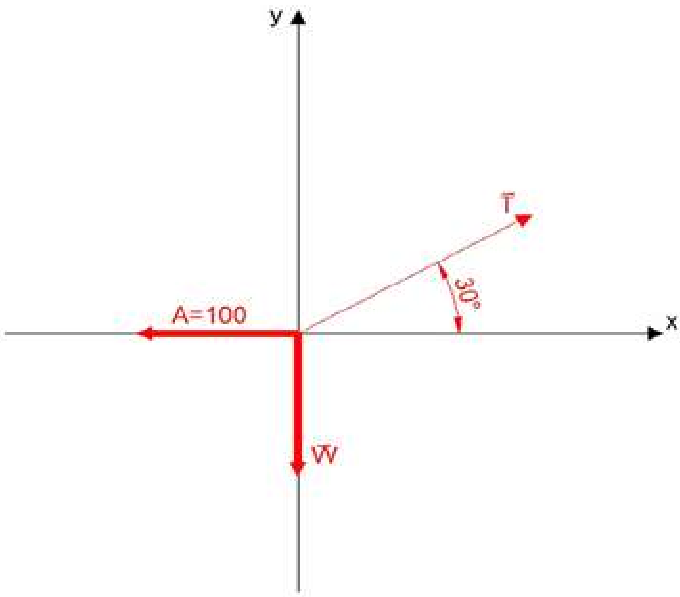
a) $\overrightarrow{R1} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$

b) $\overrightarrow{R2} = -\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}$

c) $\overrightarrow{R3} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$



16. La suma de los tres vectores es cero (figura adjunta): ¿Cuál debe ser la longitud de los vectores $\vec{T}$ y $\vec{W}$.



17. Encuentre los vectores unitarios y los ángulos directores de:

$\vec{A}yz = 3\vec{j} + 5\vec{k}$	$\vec{F}xy = 7\vec{i} + 8\vec{j}$
$\vec{B}yz = -2\vec{j} + 4\vec{k}$	$\vec{G} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$
$\vec{C}yz = -\vec{j} - \vec{k}$	$\vec{H} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{D}xy = \vec{i} + \vec{j}$	$\vec{I} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$
$\vec{E}xz = 3\vec{i} - 3\vec{k}$	$\vec{L} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

18. Encuentre los valores de a, b, c, d, e, f de tal manera, que en todos los casos tengamos un unitario:

$\overrightarrow{\mu_A} = 0.0\vec{i} + 0.2\vec{j} - A\vec{k}$	$\overrightarrow{\mu_D} = 0.30\vec{i} + D\vec{j} + 0.0\vec{k}$
$\overrightarrow{\mu_B} = 0.64\vec{i} - b\vec{j} + 0.0\vec{k}$	$\overrightarrow{\mu_E} = 0.45\vec{i} + 0.285\vec{j} + e\vec{k}$
$\overrightarrow{\mu_C} = c\vec{i} + 0.81\vec{j} + 0.0\vec{k}$	$\overrightarrow{\mu_F} = 0.56\vec{i} + f\vec{j} - 0.76\vec{k}$

19. Los ángulos directores de los vectores son:

$$\vec{A} = (\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°)$$
$$\vec{B} = (\alpha = 90°, \beta = 45°, \gamma = 45°)$$
$$\vec{C} = (\alpha = 15°, \beta = 90°, \gamma = 75°)$$
$$\vec{D} = (\alpha = 70°, \beta = 47°, \gamma = 40°)$$
$$\vec{E} = (\alpha = 130°, \beta = 50°, \gamma = 65.3°)$$

Determine los vectores unitarios.

20. Dados los siguientes vectores:

$\vec{A} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$	$\vec{E} = -4\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{B} = 8\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$	$\vec{F} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k}$
$\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$	$\vec{G} = 10\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
$\vec{D} = 0\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$	$\vec{H} = 5\vec{i} + 11\vec{j} - 7\vec{k}$

Expréselos como el producto de su módulo por el unitario y en los que sea posible indique su orientación geográfica.

21. Los vectores cuyos datos se dan a continuación, parten del punto A y llegan al punto B. Determine para cada uno de los casos:

21.1. El plano en el que están contenidos y grafíquelos.

21.2. El ángulo que forman con los ejes X, Y, Z (ángulos directores).

21.3. El vector en términos de los unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

21.4. El vector como el producto de su módulo por su dirección y sentido.

21.5. Indique la orientación geográfica en los casos en que sea posible.

A(3,0,-2) B(-5,0,8)	A(-3,0,8) B(10,0,-8)	A(10,-15,12) B(-8,-15,6)
A(-4,3,-0) B(-5,2,0)	A(0,10,4) B(6,6,3)	A(20,15,13) B(16,8,13)
A(0,-4,-1) B(0,1,2)	A(7,3,0) B(-3,3,0)	A(5,3,2) B(4,10,-7)

22. Sean los vectores: $\vec{A} = (1,3)$; $\vec{B} = (2,5)$; $\vec{C} = (0,4)$. Calcular cada uno de los siguientes productos:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

b) $\vec{B} \cdot \vec{C}$

c) $\vec{A} \cdot \vec{C}$

d) $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} - \vec{C}\right)$

e) $C \cdot \left(A + B\right)$

f) $\left(3\vec{A} + 2\vec{B}\right) \cdot 4\vec{C}$

g) $\left(5\vec{B} - 2\vec{C}\right) \cdot 6\vec{A}$

h) $2\vec{A} \cdot \vec{B} - 3\vec{C} \cdot \vec{B}$

i) $\left(\vec{A} + \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} - \vec{A}\right)$

23. Calcular el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

a) $\vec{A} = 7\vec{j} + 20\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} - \vec{k}$

b) $\vec{A} = \vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{B} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$

c) $\vec{A} = -\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{B} = -4\vec{j} - \vec{j}$

24. Cuál es la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}(\vec{A}_B)$ si:

a) $\vec{A} = \left(2\vec{i} + 4\vec{j}\right)$; $\vec{B} = \left(7\vec{i} - \vec{j}\right)$

b) $\vec{A} = \left(-\vec{i} + 3\vec{j}\right)$; $\vec{B} = \left(8\vec{i} + \vec{j}\right)$

c) $\vec{A} = (7,10,0)$; $\vec{B} = (11,1,0)$

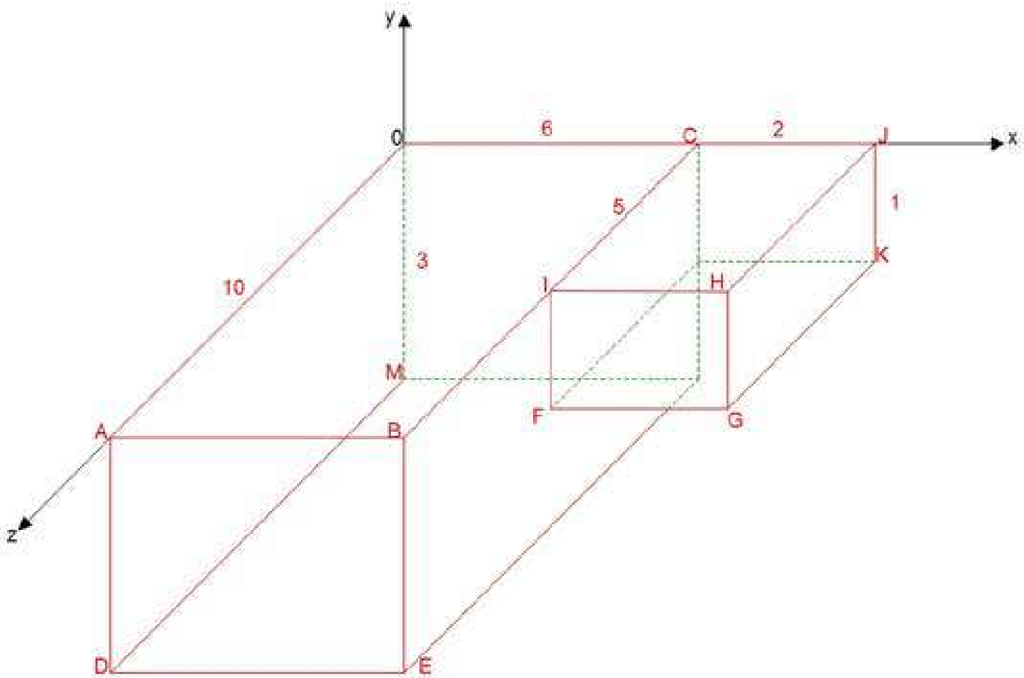
d) $\vec{A} = \left(5\vec{i} - 5\vec{j}\right)$; $\vec{B} = \left(5\vec{i} - \vec{k}\right)$

25. A partir de la figura adjunta. Determinar:

25.1. El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{IG}$.

25.2. El valor de la expresión $2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{AD}$.

25.3. La proyección de $\overrightarrow{CA}$ sobre $\overrightarrow{CG}$ $[\overrightarrow{CA}_{CG}]$.



26. Dados los vectores: $\vec{A} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{C} = -2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$. Calcular:

26.1. $3\vec{B} \text{ x } 2\vec{C}$

26.2. $(2\vec{A} - 3\vec{B}) \text{ x } 4\vec{C}$

26.3. $3\vec{A} \cdot 2\vec{B} \cdot \vec{C} \text{ x } 2\vec{A}$

26.4. $(2\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{C} \cdot 3\vec{A} \text{ x } 2\vec{C}$

27. En una mesa de billar, hay tres bolas, A, B, C. La bola B se encuentra con respecto a A en la posición (E10°N; distancia 0.4 m) y la bola C se encuentra con respecto a A al (E15°S ; distancia 0.50 m). ¿Cuál es la posición de B con respecto a C?

28. Dados los siguientes vectores:

$\lvert A \rvert = 30\text{N}$ e = 60° E 30 °S	$\lvert E \rvert = 35\text{m}$ d = 35° SE
$\lvert B \rvert = 40\,\text{m/s}$ e = 30° S 60° O	$\lvert F \rvert = 45\ \text{rad/s}$ d = 60° O 75° S
$\lvert C \rvert = 20\text{km}$ e = 45° O 37° N	$\lvert G \rvert = 50\text{ cm}$ d = 50° N 20° O
$\lvert D \rvert = 25\,\text{m/s}^2$ e = 70° N 55° E	$\lvert H \rvert = 15\text{mN}$ d = 30° E 60°N

28.1. Exprese los vectores gráficamente representando el prisma de proyección.

28.2. Exprese los vectores en términos de $(\vec{i}, \vec{J}, \vec{K})$.

28.3. Determine las siguientes operaciones

a) $\vec{A} + 2\vec{B} - 3\vec{C}$

b) $\left(2\vec{D} \times \vec{E}\right) \cdot \vec{F}$

c) $\left(\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{f}\right) \cdot \vec{G} \cdot \vec{H}$

d) $\left(2\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right)$

29. Un avión de aeromodelismo despega en la dirección SO y con un ángulo de elevación de 60°. Luego de volar en línea recta una distancia de 400 metros desde su punto de partida, su dueño desea impactar en un blanco ubicado en el punto $\vec{B}$ = (-60,50,-30) metros con respecto al punto de partida. Determinar.

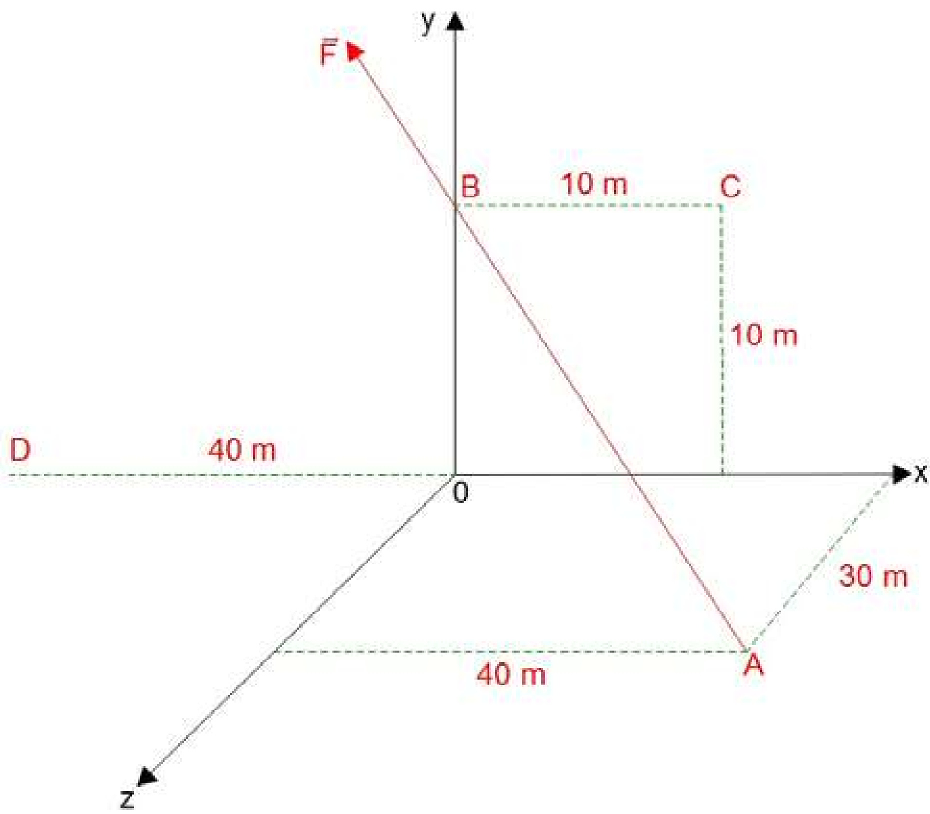
29.1. La dirección que debe tomar el avión para lograr su propósito.

29.2. La posición del avión respecto al blanco.

30. Se tiene una cuerda fija en el punto A y se la hala con fuerza de 1000 N, desde el punto B. Determinar:

30.1. El vector $\vec{F}$ en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

30.2. La proyección del vector $\vec{F}$ sobre $\overrightarrow{DC}$.



31. Un niño eleva una cometa desde un punto O en el suelo. Cuando ha desenrollado 80 m de piola en dirección N20°E, la cometa se encuentra 50 m sobre el suelo (posición A), el niño se mueva 30 m en dirección SE hasta un punto P. Posteriormente, el viento obliga a la cometa a realizar un desplazamiento $\vec{D} = (-70\vec{i} -15\vec{j} + 60\,\vec{k})$ m desde la posición A hasta una nueva posición B. Determinar:

31.1. Cuanta piola tiene que enrollar o desarrollar el niño para ir de O a P, de modo que la cometa siga en la posición A.

31.2. Cuál es la altura de la cometa, sobre el suelo cuando se encuentra en la posición.

31.3. Qué ángulo forman los vectores posición de la cometa en A y B, respecto al punto P.

32. Para la figura adjunta determinar:

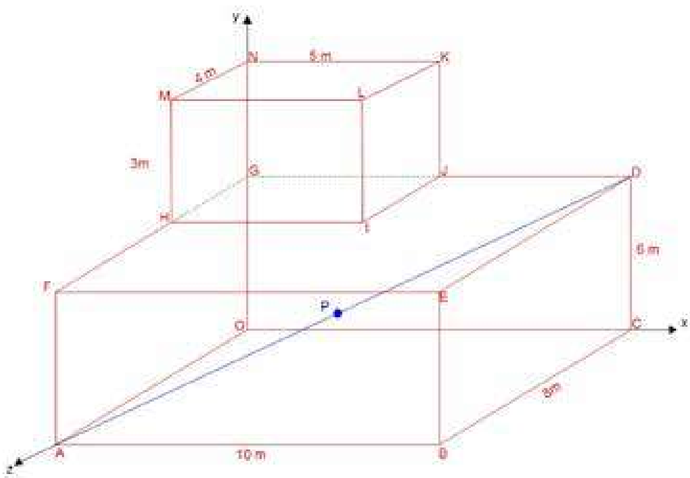
32.1. El vector: $\vec{R} = 2\overrightarrow{NP} + 3\overrightarrow{JB} - 4\overrightarrow{CF}$.

32.2. En el vector proyección de $\overrightarrow{NI}$ y $\overrightarrow{GA}$.

32.3. En ángulo entre $\overrightarrow{NJ}$ y $\overrightarrow{GA}$.

32.4. Un vector perpendicular a GC y GP, P: punto medio de AD.

32.5. Exprese los vectores que están en coordenadas rectangulares (cartesianas), en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.



33. Un avión de aeromodelismo parte del punto P (80, 50, 60) m con respecto a la pista, en dirección S60°E y vuela una distancia de 75 m, luego de lo cual cambia de rumbo y vuela 100 m, siguiendo una dirección y sentido que coincide con el unitario de $\vec{R} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$, con respecto a la pista.

33.1. Encuentre la posición final del avión con respecto a la pista.

33.2. Encuentro el vector unitario paralelo a la posición final del avión con respecto a la pista.

34. Dos pistoleros A y B se encuentran sobre el mismo plano horizontal. B se encuentra respecto a A en el punto (-2,0,-3) km el pistolero B lanza una moneda en línea recta en la dirección: S30°E; ángulo de elevación de 60° y cuando recorre una distancia de 200 (metros) es impactada por una bala del pistolero A. Determine:

34.1. La dirección del disparo.

34.2. El vector unitario paralelo a la dirección de lanzamiento de la moneda.

35. Desde lo alto del edificio de administración de la Espoch (6 metros) por medio de un teodolito medimos un ángulo de 15° sobre la horizontal y una distancia de 25 km al Chimborazo. Giramos el teodolito un ángulo 150° y medimos un ángulo de depresión de 12° al estadio olímpico y estimamos una distancia de 2.5 km.

Determinar:

35.1. La distancia entre el Chimborazo y el estadio.

35.2. La posición del estadio respecto al Chimborazo.

36. Un avión de aeromodelismo despega la dirección N60°E; ángulo de elevación de 30°. Luego de volar en línea recta 600 m gira en la dirección SE, ángulo de depresión de 60° y luego de recorrer en línea recta 300 m (metros), se estrella contra un árbol. Determinar:

36.1. La posición del árbol en el espacio en función de los unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respecto al punto de despegue del avión.

37. Un vector cuya magnitud es de 100 unidades tiene una línea de acción cuyos cosenos directores son: $\cos\alpha = 0.7$, $\cos\beta = 0.2$ respecto a un sistema de coor-

denadas XYZ. Si el vector está localizado en el espacio y en el primer octante y se aleja del origen, exprese al vector en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Determine el fiel ángulo director de elevación ê.

38. Para qué valores de m formarán un ángulo de 60° entre sí, los vectores que van de: (2,-7,-3) a (7,1,-3) y de: (8, m, -4) a (4,-2,1).

39. Dados los vectores:

$$A = 2i + 3j - 6k$$

$$B = -2i + 6j + 3k$$

$$C = 4i - 2j - 3k$$

$$D = ai - bj - ck$$

Determinar: a, b, c si el vector $\vec{D}$ es la posición de $\vec{A}$ respecto a $\vec{B}$ más el vector $\vec{C}$. O sea $\vec{D} = \vec{P}_{A/B} + \vec{C}$:

40. Un avión se mueve a 100 km/h en una dirección N32.5°O:

40.1. Encuentre las componentes del vector de velocidad en las direcciones Norte y Oeste .

40.2. Después de 3 s (h), ¿qué distancia al Norte y al Oeste, respectivamente, se ha desplazado el avión?

41. Un cartero recorre 30 m hacia el Norte, 25 m al Este, 12 m al Sur y luego sube en un elevador 36 m en un edificio, ¿Cuál es el desplazamiento final desde el origen?

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. d. D. Villafuerte, Sistema internacional y factores de conversión de unidades.

[2] Editora Kano, Colección Espartaco, 2012.

[3] E. G. De la Torre. Manual de Ciencias: Matématicas-Física-Química. 2011.

[4] H. Castañeda, Física. Medellín-Colombia: Susaeta Ediciones, 1983.

[5] D. Halliday, R. Resnick y W. Jearl, Física, 6.a ed. en inglés-3.a edición en español, vol. 1. Grupo editorial Patria, 2008.

[6] J. M. Guizado Estrada, Problemas resuletos de Física. Perú: San Marcos.

[7] J. Goñi Galarza, Física general, 4,a ed. Lima-Perú: Ingeniería E.I.R.L.

[8] J. Zambrano Orejuela, Física 1. Vectoríal Basica, 2.a ed. Génesis Ediciones, 2007.

[9] F. Aucallanchi Velásquez, Problemas de física y como resolverlos. RACSO, 1993.

[10] ESPOL, Guía de laboratorio de Física II. Guayaqui-Ecuador, 1978.

[11] M. Alvarenga, Física general. 1976.

[12] J. Jewett, Física para ciencias e Ingeniería, 7.a ed., vol. I, 2008.

[13] Escuela Politécnica Nacional, Física Problemas propuestos y resueltos. Quito.

La física, ciencia que estudia los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, establece los fundamentos científicos para las carreras técnico-científicas que ofertan las politécnicas y universidades en el país y en el mundo.
Esta asignatura correlaciona las interacciones de las diversas propiedades de la materia, identificando sus características mediante las magnitudes que intervienen en dichos fenómenos para, mediante el método científico, establecer las leyes que las rigen, que son correlaciones entre tales magnitudes.

Diego Guillermo Barba Maggi nació en Riobamba, Ecuador, en el año de 1980. Experto en procesos *e-learning* por la Fundación FATLA. Ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador. Magíster en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato, Ecuador. Doctor de la Universidad de Buenos Aires, Área Ingeniería, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina. Actualmente, docente investigador de la Espoch desde el año 2004, profesor de Física, Matemáticas y Seguridad Industrial. Coautor de varias publicaciones en revistas indexadas relacionadas a medios granulares sumergidos vibrados. Director y cofundador del Grupo de investigación GIICYT-Espoch, galardonado durante su formación doctoral con el primer premio SEVYT-FIUBA por la ponencia de la tesis doctoral titulada «Dinámica de suspensiones concentradas sometidas a vibración mecánica», calificada con una nota de sobresaliente.
Bernardo Ezequiel Barba Barba nació en Colta, Ecuador, en el año de 1957. Especialista en computación aplicada al ejercicio docente e ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador. Magíster en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato, Ecuador. Docente investigador de Espoch durante 37 años, actualmente jubilado. Mejor egresado de la carrera de Ingeniería Mecánica en el año 1980, profesor de Física, socio fundador del Colegio de Ciencias Pitágoras, Riobamba. Actualmente, director fundador de ACIBAG, Riobamba. Decano encargado de la FIE-Espoch en el año 2007.

ISBN: 978-9942-42-115-9
9 789942 421159